

Cours de Licence 3: Topologie

Cours de: Pascal Autissier
Rédigé par Hugo Clouet*

Année universitaire 2023 - 2024
Version: 9 novembre 2025

Table des matières

1	Espaces métriques, espaces topologiques	3
1.1	Espaces métriques	3
1.2	Espaces topologiques	5
1.3	Adhérence, intérieur	8
1.4	Limite	10
1.5	Continuité	11
1.6	Comparaison de topologies	13
1.7	Topologie produit	15
2	Connexité	19
2.1	Définitions, exemple fondamental	19
2.2	Fonctions continues et connexité	19
2.3	Union, adhérence et produit	20
2.4	Connexité par arc	21
3	Compacité	23
3.1	Définitions	23
3.2	Compacité des espaces métriques	23
3.3	Propriétés des compacts	25
3.4	Fonctions continues et compacité	26
4	Espaces métriques complets	27
4.1	Suite de Cauchy, espaces complets, exemple fondamental	27
4.2	Propriétés des espaces complets	28
4.3	Applications de la complétude	29

*email: hugo.clouet@etu.u-bordeaux.fr

1 Espaces métriques, espaces topologiques

On va présenter dans ce chapitre les notions de bases de topologie : il s'agit de parler de limite et continuité sur des espaces plus généraux que $\mathbf{R}^n$.

1.1 Espaces métriques

La première idée pour définir limite et continuité sur un ensemble X est de mesurer l'écart entre deux points de X . On introduit donc la notion de distance.

Définition 1.1.1. Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une application

$$d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}_+$$

vérifiant pour tout $(x, y, z) \in X^3$:

- (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) $d(y, x) = d(x, y)$; (*symétrie*)
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (*inégalité triangulaire*)

Un *espace métrique* est un couple (X, d) où X est un ensemble et d une distance sur X .

Remarque 1.1.2. Sur $\mathbf{R}$, on pose $d(x, y) = |x - y|$. On appelle d la *distance usuelle* et $\mathbf{R}$ muni de cette distance est un espace métrique.

Définition 1.1.3. Soit (X, d) un espace métrique. Soient $x \in X$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$.

- (i) On appelle *boule ouverte* de centre x et de rayon r la partie : $\mathcal{B}(x, r) = \{y \in X; d(x, y) < r\}$.
- (ii) On appelle *boule fermée* de centre x et de rayon r la partie : $\bar{\mathcal{B}}(x, r) = \{y \in X; d(x, y) \leq r\}$.

Définition 1.1.4. (i) Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est *bornée* lorsqu'il existe $x_0 \in X$ et $r > 0$ tel que $A \subset \bar{\mathcal{B}}(x_0, r)$.

(ii) Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. On dit qu'une application $f: X \rightarrow Y$ est *bornée* lorsque $f(X)$ est bornée. On note $\mathcal{F}_b(X, Y)$ le sous-ensemble des applications bornées.

Exemple 1.1.5. (1) Soit $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$. Les boules sont des intervalles. Plus précisément, si $x \in \mathbf{R}$ et $r > 0$, alors

$$\mathcal{B}(x, r) =]x - r, x + r[\quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{B}}(x, r) = [x - r, x + r].$$

(2) Sur $\mathbf{C}$, on remplace la valeur absolue par le *module* $d(x, y) = |x - y|_{\mathbf{C}}$. La boule ouverte de centre x et de rayon r est le disque ouvert de centre x et de rayon r et $\bar{\mathcal{B}}(x, r)$ est le disque fermé.

(3) Sur $\mathbf{K}^n$ avec $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$, on définit des distances faisant intervenir les *distances entre coordonnées*. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbf{K}^n$:

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \quad d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i - y_i|.$$

La distance d_2 est appelée la *distance euclidienne* (pour vérifier l'inégalité triangulaire pour d_2 , on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

(4) Le *produit fini d'espaces métriques* : soient $(X_1, t_1), \dots, (X_n, t_n)$ des espaces métriques. On définit des distances sur $X_1 \times \dots \times X_n$. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $X_1 \times \dots \times X_n$. On pose :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n t_i(x_i, y_i) \quad d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n t_i(x_i, y_i)^2 \right)^{1/2} \quad d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} t_i(x_i, y_i).$$

(5) *Distance de la convergence uniforme* sur $\mathcal{F}_b(X, Y)$: soit (Y, t) un espace métrique et X un ensemble. On définit une distance sur $\mathcal{F}_b(X, Y)$ par :

$$(\forall (f, g) \in \mathcal{F}_b(X, Y)^2) \quad d(f, g) = \sup_{x \in X} \{t(f(x), g(x))\}.$$

Les fonctions f et g sont bornées, donc $f(X) \subset \bar{\mathcal{B}}(x_0, r_0)$ et $g(X) \subset \bar{\mathcal{B}}(x_1, r_1)$. De plus, pour $x \in X$,

$$t(f(x), g(x)) \leq t(f(x), x_0) + t(x_0, x_1) + t(x_1, g(x)) \leq r_0 + t(x_0, x_1) + r_1$$

(indépendant de x). Le sup est bien défini.

(6) *Distance triviale* : soit X un ensemble, on peut le munir de la distance :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

On a $\mathcal{B}(x, \frac{1}{2}) = \{x\} = \bar{\mathcal{B}}(x, \frac{1}{2}) = \mathcal{B}(x, 1)$ et $\bar{\mathcal{B}}(x, 1) = X$.

Un exemple important d'espace métrique est le cas des espaces vectoriels normés. On considère maintenant E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

Définition 1.1.6. On appelle *norme* sur E une application

$$\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbf{R}_+$$

vérifiant pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbf{K}$:

- (i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$; (*définie positive*)
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$; (*homogénéité*)
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (*inégalité triangulaire*)

Un *espace vectoriel normé* est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme de E .

La proposition suivante précise en quel sens les espaces vectoriels normés sont des espaces métriques.

Proposition 1.1.7. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors

$$\begin{aligned} d: E \times E &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

définit une distance sur E .

Démonstration. Il suffit de vérifier les trois axiomes.

- Si $d(x, y) = 0$, alors $\|x - y\| = 0$, donc $x - y = 0$ puis $x = y$. Réciproquement, $d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$.
- Pour la symétrie,

$$d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = d(x, y).$$

- Pour l'inégalité triangulaire,

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

□

Exemple 1.1.8. (1) Le module $|\cdot|$ sur $\mathbf{K}$ est une norme sur $\mathbf{K}$ vu comme $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

(2) Sur $\mathbf{K}^n$, les distances d_1, d_2, d_∞ introduites précédemment sont associées à des normes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad \|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$.

(3) Norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{F}_b(X, \mathbf{K})$: soit X un ensemble, $\mathcal{F}_b(X, \mathbf{K})$ est alors un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^X$ (exercice). On le munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

La distance associée à $\|\cdot\|_\infty$ est clairement la distance de la convergence uniforme sur $\mathcal{F}_b(X, \mathbf{K})$. Si $X = \llbracket 1, n \rrbracket$, on retrouve la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie ci-dessus.

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 1.1.9. On appelle *ouvert* de X toute partie U de X vérifiant

$$(\forall x \in U) (\exists r \in \mathbf{R}_{>0}) \quad \mathbf{B}(x, r) \subset U.$$

Pour conclure cette section, on donne des propriétés des ouverts, qui vont définir l'axiomatique pour les espaces topologiques.

Proposition 1.1.10. On a les propriétés suivantes :

- (i) Les ensembles $\emptyset$ et X sont des ouverts.
- (ii) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
- (iii) Une intersection de deux ouverts est un ouvert.

Démonstration. (i) L'ensemble $\emptyset$ est ouvert de façon évidente et si $x \in X$, alors $\mathbf{B}(x, r) \subset X$, donc X est ouvert.

(ii) Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$ qui est ouvert, donc il existe $r \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $\mathbf{B}(x, r) \subset U_{i_0}$. On a alors $\mathbf{B}(x, r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

(iii) Soient U_1 et U_2 deux ouverts et $x \in U_1 \cap U_2$. Il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $\mathbf{B}(x, r_1) \subset U_1$ et $\mathbf{B}(x, r_2) \subset U_2$. Si on prend $r = \min(r_1, r_2)$, alors $r > 0$ et $\mathbf{B}(x, r) \subset U_1 \cap U_2$. □

Remarque 1.1.11. Dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, l'intersection infinie d'ouverts n'est pas un ouvert. Par exemple,

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}_{>0}} \mathbf{B}\left(0, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

n'est pas ouvert.

On arrive à la notion d'espaces topologiques. On oublie la notion de distance et on se donne $\mathcal{T}$ un ensemble de partie de X vérifiant les propriétés de la proposition précédente.

1.2 Espaces topologiques

Définition 1.2.1. Soit X un ensemble. Une *topologie* sur X est un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X , appelées *ouverts*, vérifiant :

- (i) les ensembles $\emptyset$ et X sont des ouverts : $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$;
- (ii) une union quelconque d'ouverts est un ouvert : si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$;
- (iii) une intersection de deux ouverts est un ouvert : si $U_1 \in \mathcal{T}$ et $U_2 \in \mathcal{T}$, alors $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Un *espace topologique* est un couple $(X, \mathcal{T})$ où X est un ensemble et $\mathcal{T}$ une topologie sur X .

Remarque 1.2.2. Dans la définition 1.2.1, par récurrence, l'axiome (iii) peut se formuler « une intersection finie d'ouverts est un ouvert ».

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 1.2.3. La *topologie induite* par d est :

$$\mathcal{T}_d = \{U \in \mathcal{P}(X); (\forall x \in U) (\exists r > 0) \mathbf{B}(x, r) \subset U\}.$$

Il est clair que c'est une topologie.

Proposition 1.2.4. Dans un espace métrique (X, d) , toute boule ouverte est un ouvert.

Démonstration. Soit $\mathbf{B}(x_0, r)$ une boule ouverte avec $x_0 \in X$ et $r > 0$. Soit $x \in \mathbf{B}(x_0, r)$. Par définition, $d(x, x_0) < r$. On prend $\varepsilon = r - d(x, x_0)$. Il est clair que $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{B}(x, \varepsilon) \subset \mathbf{B}(x_0, r)$. En effet, soit $y \in \mathbf{B}(x, \varepsilon)$. On a

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = r$$

d'où $y \in \mathbf{B}(x_0, r)$. □

Corollaire 1.2.5. Soit U une partie de X . La partie U est un ouvert de X si et seulement si U est une union de boules ouvertes.

Démonstration. • On suppose U ouvert, donc par définition : $(\forall x \in U) (\exists r_x > 0) \mathbf{B}(x, r_x) \subset U$. On a alors directement $U = \bigcup_{x \in U} \mathbf{B}(x, r_x)$.

• On suppose que U est une union de boules ouvertes. Chaque boule ouverte est un ouvert. Par l'axiome (ii) de topologie, U est un ouvert. □

Retournons au cas général :

Définition 1.2.6. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, on appelle *fermé* toute partie de X dont le complémentaire est ouvert. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de X .

Les axiomes de topologie donnent par passage au complémentaire les propriétés suivantes des fermés.

Proposition 1.2.7. On a les propriétés suivantes :

- (i) les ensembles X et $\emptyset$ sont des fermés ;
- (ii) une intersection quelconque de fermés est un fermé ;
- (iii) une union finie de fermés est un fermé.

Proposition 1.2.8. Dans un espace métrique (X, d) , toute boule fermée est un fermé.

Démonstration. Soit $\overline{\mathbf{B}}(x_0, r)$ une boule fermée. On doit vérifier que $U = X \setminus \overline{\mathbf{B}}(x_0, r)$ est ouvert. Soit $x \in U$, alors $d(x, x_0) > r$. Prenons $\varepsilon = d(x, x_0) - r$, il est clair que $\varepsilon > 0$. Vérifions que $\mathbf{B}(x, \varepsilon) \subset U$. Soit $y \in \mathbf{B}(x, \varepsilon)$, on a par définition $d(x, y) < \varepsilon$. On a alors

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) < d(y, x_0) + \varepsilon$$

donc $d(y, x_0) > d(x, x_0) - \varepsilon = r$, d'où $y \in U$. □

- Exemple 1.2.9.** (1) Dans $\mathbf{R}$, les intervalles fermés $[a, b]$ pour $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et $a \leq b$, sont fermés.
 (2) Les intervalles $] - \infty, b]$ et $[a, +\infty[$ sont fermés, comme complémentaire des ouverts $]b, +\infty[$ et $] - \infty, a[$.
 (3) En revanche, $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.
 (4) *Topologie discrète* : Soit $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Toutes les parties de X sont ouvertes. C'est la topologie induite par la distance triviale. Pour vérifier si une topologie donnée est discrète, il suffit de vérifier que tous les singletons sont ouverts. Par exemple, $\mathbf{Z}$ muni de la distance usuelle $d: (x, y) \rightarrow |x - y|$ est discret (en effet, si $n \in \mathbf{Z}$, alors $B(n, 1) = \{n\}$).
 (5) *Topologie grossière* : Soit $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. C'est la topologie qui a le moins d'ouverts possibles. On verra plus tard que si X a au-moins deux éléments, cette topologie n'est pas métrisable (au sens suivant).

Définition 1.2.10. On dit qu'une topologie $\mathcal{T}$ dans un ensemble X est *métrisable* lorsqu'il existe une distance sur X qui induit la topologie $\mathcal{T}$.

Définition 1.2.11. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. Un *voisinage* de x est une partie V de X contenant un ouvert contenant x . On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x . Autrement dit :

$$\mathcal{V}(x) = \{V \in \mathcal{P}(X); (\exists U \in \mathcal{T}) x \in U \subset V\}.$$

Proposition 1.2.12. Si (X, d) est un espace métrique et $x \in X$, on a :

$$\mathcal{V}(x) = \{V \in \mathcal{P}(X); (\exists r \in \mathbf{R}_{>0}) B(x, r) \subset V\}.$$

Démonstration. • Soit V un voisinage de x . Il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset V$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$, d'où $B(x, r) \subset V$.

• Soit V une partie de X vérifiant : $(\exists r > 0) B(x, r) \subset V$. La boule $B(x, r)$ est alors un ouvert contenant x et contenu dans V , d'où V est un voisinage de x . $\square$

On peut caractériser les ouverts à l'aide des voisinages.

Proposition 1.2.13. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une partie V est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points. Autrement dit :

$$V \in \mathcal{T} \Leftrightarrow (\forall x \in V) V \in \mathcal{V}(x).$$

Démonstration. • Évident.

• On suppose que si $x \in V$, alors $V \in \mathcal{V}(x)$. Pour $x \in V$, il existe un ouvert O_x tel que $x \in O_x \subset V$. On a alors $V = \bigcup_{x \in V} O_x$ qui est ouvert comme réunion d'ouverts. $\square$

Lemme 1.2.14. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $x \in X$. Une intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x .

Démonstration. Soient $V_1, \dots, V_n$ des voisinages de x . Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $U_i \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U_i \subset V_i$. On a alors

$$x \in \bigcap_{i=1}^n U_i \subset \bigcap_{i=1}^n V_i$$

et $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de X . $\square$

Dans un espace métrique, il n'est pas toujours facile d'identifier les ouverts, mais il est facile de décrire les boules ouvertes et on sait que tout ouvert est union de boules ouvertes.

C'est une situation générale : dans un espace topologique, on peut avoir des ouverts simples à décrire et qui « engendrent » tous les ouverts par union quelconques. Cela motive la définition suivante.

Définition 1.2.15. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'un ensemble $\mathcal{B}$ d'ouverts est une *base d'ouverts* lorsque tout ouvert de X peut s'écrire comme union d'éléments de $\mathcal{B}$.

On a un critère pour savoir si un ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ est la base d'ouverts d'une topologie.

Proposition 1.2.16. Soient X un ensemble et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble de parties de X . L'ensemble $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts d'une topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ si et seulement si :

(i) on a $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

(ii) si B_1 et B_2 sont deux éléments de $\mathcal{B}$, alors $B_1 \cap B_2$ est une union d'éléments de $\mathcal{B}$.

Démonstration. • Évident car $X \in \mathcal{T}_B$ et $(B_1, B_2) \in \mathcal{B}^2$ implique que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}_B$.

• On suppose (i) et (ii). On pose $\mathcal{T}_B = \llcorner$ l'ensemble des unions d'éléments de $\mathcal{B} \llcorner$. On doit vérifier que $\mathcal{T}_B$ est une topologie : $\emptyset \in \mathcal{T}_B$ est trivial et $X \in \mathcal{T}_B$ par (i). Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}_B$. Chaque U_i est une union d'éléments de $\mathcal{B}$, donc $\bigcup_{i \in I} U_i$ aussi. Soit U_1 et U_2 deux éléments de $\mathcal{T}_B$. On écrit : $U_1 = \bigcup_{i \in I} B_i$ et $U_2 = \bigcup_{j \in J} B'_j$, donc

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (B_i \cap B'_j).$$

On a alors $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_B$. □

De façon similaire, on introduit la notion de base de voisinages.

Définition 1.2.17. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$ est une *base de voisinages* de x lorsque tout voisinage de x contient un élément de $\mathcal{B}$:

$$(\forall V \in \mathcal{V}(x)) (\exists B \in \mathcal{B}) \quad B \subset V.$$

Proposition 1.2.18. Si (X, d) est un espace métrique, alors :

- (i) tout point $x \in X$ admet une base dénombrable de voisinages : $\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}_{>0}\}$;
- (ii) $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{n}); (n \in \mathbb{N}_{>0}) (x \in X)\}$ est une base d'ouverts de X .

Démonstration. (i) Soit V un voisinage de x . Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$. On choisit un entier n tel que $\frac{1}{n} \leq r$ i.e. $n \geq \frac{1}{r}$. On a alors $B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x, r) \subset V$.
(ii) Soit U un ouvert de X . L'ouvert U est voisinage de chacun de ses points puisque pour chaque $x \in U$, il existe $n_x \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $B(x, \frac{1}{n_x}) \subset U$. On a alors

$$U = \bigcup_{x \in U} B\left(x, \frac{1}{n_x}\right).$$

□

Remarque 1.2.19. La propriété (i) est une propriété importante des espaces métriques. Elle n'est pas vraie dans les espaces topologiques en général.

On va définir la notion de sous-espace topologique, en précisant quelle topologie on met sur un sous-ensemble.

Définition 1.2.20. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de X . On appelle *topologie induite* par $\mathcal{T}$ sur A la topologie :

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A; U \in \mathcal{T}\}$$

et on vérifie facilement que c'est une topologie sur A . On dit que $(A, \mathcal{T}_A)$ est un *sous-espace topologique* de $(X, \mathcal{T})$ et on appelle $U \cap A$ la *trace* de l'ouvert U sur A .

On vérifie facilement les propriétés suivantes.

Proposition 1.2.21. (i) Les fermés de A sont les traces des fermés de X :

$$\mathcal{F}_A = \{F \cap A; F \in \mathcal{F}\}.$$

(ii) Pour un point $x \in A$, les voisinages de x pour la topologie $\mathcal{T}_A$ sont les traces des voisinages de x pour $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{V}_A(x) = \{V \cap A; V \in \mathcal{V}(x)\}.$$

(iii) Si $B \subset A \subset X$, la topologie induite par $\mathcal{T}_A$ sur B n'est rien d'autre que la topologie $\mathcal{T}_B$ induite par $\mathcal{T}$ sur B :

$$\mathcal{T}_B = \{U \cap B; U \in \mathcal{T}\} = \{U' \cap B; U' \in \mathcal{T}_A\}.$$

Démonstration. Exercice. □

Définition 1.2.22. Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On dit que le couple (A, d_A) est un *sous-espace métrique* de (X, d) lorsque $d_A = d|_{A \times A}$.

On observe que $d|_{A \times A}$ est bien une distance sur A .

Proposition 1.2.23. Un sous-espace métrique est un sous-espace topologique.

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Soit U une partie de A . On utilise l'équivalence

$$U \text{ est ouvert dans } A \Leftrightarrow U \text{ est une union de boules ouvertes de } A.$$

On observe qu'une boule ouverte de A est la trace d'une boule ouverte de X : $B_A(x, r) = B(x, r) \cap A$. On a donc :

$$\begin{aligned} U \text{ est ouvert dans } A &\Leftrightarrow U \text{ est union de traces de boules ouvertes de } X \\ &\Leftrightarrow U \text{ est la trace d'une union de boules ouvertes de } X \\ &\Leftrightarrow U \text{ est la trace d'un ouvert de } X. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.2.24. (1) La topologie induite sur $\mathbf{Z}$ par celle de $\mathbf{R}$ est la topologie discrète.

(2) On prend $X = \mathbf{R}$ muni de la topologie usuelle et $A = [0, 2[$. L'intervalle $[0, 1[$ est alors un ouvert de A (car $[0, 1[=] - 1, 1[\cap A$) mais pas de $\mathbf{R}$.

(3) De même, $[1, 2[$ est un fermé de A pour la topologie induite (car $[1, 2[= [1, 3] \cap A$) mais pas de $\mathbf{R}$.

1.3 Adhérence, intérieur

Dans cette section, on travaille avec un espace topologique $(X, \mathcal{T})$.

Définition 1.3.1. Soit A une partie de X et $x \in X$. On dit que x est *adhérent* à A lorsque tout voisinage de x dans X contient un point de A .

Exemple 1.3.2. Dans $\mathbf{R}$, si $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}_{>0}\}$, alors $\frac{1}{2}$ est adhérent à A . En fait, tout élément de A est adhérent à A , mais 0 n'est pas dans A , il est néanmoins adhérent à A .

Définition 1.3.3. Pour une partie A de X , on appelle *adhérence* de A et on note $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A .

Proposition 1.3.4. L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A est le plus petit fermé de X contenant A . En fait on a :

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}, A \subset F} F.$$

Démonstration. On montre d'abord la formule. Cela donnera le résultat puisque l'intersection de fermés est un fermé. Soit $x \in X$. On montre l'équivalence $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}, A \subset F} F$:

- On suppose $x \notin \overline{A}$, il existe un voisinage V de x qui n'intersecte pas A . Il existe donc un ouvert U tel que $x \in U \subset V$. On prend $F = X \setminus U$ fermé. En particulier, il contient A puisque U et A sont disjoints, on a donc $A \subset F$ et $x \notin F$, d'où $x \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}, A \subset F} F$.
- On suppose $x \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}, A \subset F} F$, il existe un fermé F contenant A tel que $x \notin F$, alors $X \setminus F$ est un voisinage ouvert de x , qui n'intersecte pas A . On conclut alors que $x \notin \overline{A}$.

Une fois que l'on a la formule, $\overline{A}$ est clairement un fermé contenant A et c'est même le plus petit fermé. □

Corollaire 1.3.5. Une partie A de X est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Démonstration. Découle directement de la proposition précédente. □

Corollaire 1.3.6. Si A et B sont deux parties de X , on a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Démonstration. • Montrons $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$: $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ donc $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$, donc il contient l'adhérence $\overline{A \cup B}$.

• Montrons $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$: on a $A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cup B}$ est un fermé contenant A , donc il contient $\overline{A}$. De même, il contient $\overline{B}$. On a alors $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$.

• Montrons $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$: on a $A \cap B \subset A \subset \overline{A}$. De même $A \cap B \subset \overline{B}$. On a alors $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. C'est un fermé contenant $A \cap B$, donc contient aussi $\overline{A \cap B}$. □

Exemple 1.3.7. Dans $\mathbf{R}$ muni de la topologie usuelle, prenons $A = [0, 1[$ et $B =]1, 2]$. On a alors $A \cap B = \emptyset$, donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Mais $\overline{A} = [0, 1]$ et $\overline{B} = [1, 2]$ donc $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

Définition 1.3.8. Une partie A de X est dite *dense* dans X lorsque $\overline{A} = X$.

Exemple 1.3.9. Les ensembles $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sont denses dans $\mathbf{R}$ (muni de la topologie usuelle).

Définition 1.3.10. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *séparable* lorsqu'il admet une partie dénombrable et dense.

Exemple 1.3.11. Dans $\mathbf{R}$, l'ensemble $\mathbf{Q}$ est dénombrable et dense, donc l'espace métrique $\mathbf{R}$ est séparable.

Définition 1.3.12. (i) Soit A une partie de X . On dit qu'un point x de A est *intérieur* à A lorsque A est un voisinage de x .

(ii) L'*intérieur* d'une partie A de X est l'ensemble des points intérieurs à A , il est noté $\text{Int}(A)$.

Proposition 1.3.13. L'intérieur d'une partie A de X est le plus grand ouvert de X contenu dans A :

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{U \in \mathcal{T}, U \subset A} U$$

Démonstration. • Soit $x \in \text{Int}(A)$. Par définition, A est un voisinage de x . Il existe un ouvert U_0 de X tel que $x \in U_0 \subset A$, alors $x \in U_0 \subset \bigcup_{U \in \mathcal{T}, U \subset A} U$.

• Réciproquement, soit $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{T}, U \subset A} U$. Il existe un ouvert U tel que $x \in U$ et $U \subset A$, alors A est voisinage de x et $x \in \text{Int}(A)$.

• Avec la formule, on a que $\text{Int}(A)$ est un ouvert contenu dans A et c'est même le plus grand ouvert de X contenu dans A . $\square$

Corollaire 1.3.14. Une partie A de X est ouverte si et seulement si $\text{Int}(A) = A$.

Démonstration. De façon analogue aux adhérences, cela découle de la proposition précédente. $\square$

Corollaire 1.3.15. Pour toute partie A de X , on a

$$X \setminus \text{Int}(A) = \overline{X \setminus A} \quad \text{et} \quad X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A).$$

Démonstration. On écrit

$$X \setminus \text{Int}(A) = X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{T}, U \subset A} U = \bigcap_{U \in \mathcal{T}, U \subset A} (X \setminus U).$$

On remarque que U est ouvert si et seulement si $X \setminus U$ est fermé : $U \subset A \Leftrightarrow X \setminus A \subset X \setminus U$. On considère $F = X \setminus U$. On a alors

$$\bigcap_{U \in \mathcal{T}, U \subset A} (X \setminus U) = \bigcap_{X \setminus U \in \mathcal{F}, X \setminus U \supset X \setminus A} (X \setminus U) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}, F \supset X \setminus A} F = \overline{X \setminus A}.$$

Utilisons la formule avec $X \setminus A$ au lieu de A : $X \setminus \text{Int}(X \setminus A) = \overline{A}$. En passant au complémentaire, on a $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$. $\square$

Corollaire 1.3.16. Pour deux parties A et B de X , on a :

$$\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \quad \text{et} \quad \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B).$$

Démonstration. • Montrons que $\text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$: on a $\text{Int}(A \cap B) \subset A \cap B \subset A$ et $\text{Int}(A \cap B)$ est un ouvert contenu dans A , donc contenu dans son intérieur $\text{Int}(A)$. De même $\text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(B)$, d'où $\text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.

• Montrons que $\text{Int}(A \cap B) \supset \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$: on a $\text{Int}(A) \subset A$ et $\text{Int}(B) \subset B$, donc $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subset A \cap B$ et $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ est un ouvert. On a donc $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cap B)$.

• Montrons que $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B)$: on a $\text{Int}(A) \subset A \subset A \cup B$ mais $\text{Int}(A)$ est un ouvert contenu dans $A \cup B$, donc aussi contenu dans $\text{Int}(A \cup B)$. De même, $\text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B)$, d'où $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B)$. $\square$

Exemple 1.3.17. La dernière inclusion peut être stricte : dans $\mathbf{R}$, prenons $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$. On a donc $\text{Int}(A) =]0, 1[$ et $\text{Int}(B) =]1, 2[$, d'où $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) =]0, 1[\cup]1, 2[$. Mais $A \cup B = [0, 2]$ et $\text{Int}(A \cup B) =]0, 2[$.

Définition 1.3.18. On appelle *frontière* d'une partie A de X l'ensemble

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

C'est un fermé de X .

Proposition 1.3.19. Pour toute partie A de X , on a

$$\partial A = \overline{A} \setminus \text{Int}(A)$$

et X est réunion disjointe de $\text{Int}(A)$, ∂A , et $\text{Int}(X \setminus A)$.

Démonstration. On a $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \cap (X \setminus \text{Int}(A)) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A)$. De plus, X est la réunion disjointe de $\overline{A}$ et de $X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)$ et $\overline{A}$ est la réunion disjointe de $\text{Int}(A)$ et de ∂A . $\square$

Exemple 1.3.20. • Dans $\mathbf{R}^n$ muni de la distance euclidienne, on a $\overline{\mathbf{B}(0,1)} = \overline{\mathbf{B}}(0,1)$ et $\partial \mathbf{B}(0,1)$ est la sphère de centre 0 et de rayon 1.

• Si on se place maintenant sur X muni de la distance triviale. Soit $x \in X$, alors $\mathbf{B}(x,1) = \{x\}$, donc $\overline{\mathbf{B}(x,1)} = \{x\} = \{x\}$. Mais $\overline{\mathbf{B}}(x,1) = X$. On voit donc que si X a au moins 2 éléments, l'adhérence de la boule ouverte n'est pas la boule fermée. Par ailleurs, $\partial \mathbf{B}(x,1) = \emptyset$.

1.4 Limite

Dans cette section (et les suivantes), nous travaillerons tantôt dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, tantôt dans un espace métrique (X, d) .

Pour les définitions et les propriétés générales, on se placera dans un espace topologique. Par contre, certaines propriétés sont spécifiques aux espaces métriques.

On précisera à chaque fois dans quel cadre on se place et les propriétés des espaces métriques utilisées.

Définition 1.4.1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X et soit $\ell \in X$. On dit que ℓ est une limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ lorsque pour tout voisinage V de ℓ dans X , il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans V :

$$(\forall V \in \mathcal{V}(\ell)) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \geq N) \quad x_n \in V.$$

Voici la traduction de cette définition dans le cas métrique.

Proposition 1.4.2. Soit (X, d) un espace métrique, $\ell \in X$ est une limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \geq N) \quad d(x_n, \ell) < \varepsilon.$$

Démonstration. • On suppose que ℓ est une limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. On applique l'hypothèse avec $V = \mathbf{B}(\ell, \varepsilon)$ un voisinage de ℓ . Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in \mathbf{B}(\ell, \varepsilon)$, alors pour tout $n \geq N$, $d(x_n, \ell) < \varepsilon$.

• On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, \ell) < \varepsilon$. Soit V un voisinage de ℓ , par la proposition 1.2.12, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbf{B}(\ell, \varepsilon) \subset V$. On applique l'hypothèse avec cet ε : $(\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \geq N) d(x_n, \ell) < \varepsilon$. On a alors que pour tout $n \geq N$, $x_n \in \mathbf{B}(\ell, \varepsilon) \subset V$. $\square$

Définition 1.4.3. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *séparé* lorsque pour tout couple $(x, y) \in X^2$ avec $x \neq y$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.

Lemme 1.4.4. Les singletons dans un espace topologique séparé sont des fermés.

Démonstration. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Soit $x \in X$. On montre que $X \setminus \{x\}$ est ouvert en vérifiant qu'il est voisinage de chacun de ses points. Soit $y \in X \setminus \{x\}$, on a directement $x \neq y$, donc il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tel que $V \cap W = \emptyset$. On a alors $y \in W \subset X \setminus \{x\}$ et donc $X \setminus \{x\}$ est un voisinage de y . $\square$

Proposition 1.4.5. Un espace métrique est toujours séparé.

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique. Soient $(x, y) \in X^2$ avec $x \neq y$. On pose $r = \frac{1}{2}d(x, y)$. Il est clair que $r > 0$ et $\mathbf{B}(x, r) \cap \mathbf{B}(y, r) = \emptyset$ puisque si $z \in \mathbf{B}(x, r) \cap \mathbf{B}(y, r)$, alors $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = 2r$ ce qui est impossible. $\square$

La notion d'espace séparé est importante pour le résultat suivant.

Théorème 1.4.6. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique séparé, toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans X admet au plus une limite. Si une telle limite $\ell \in X$ existe, on dit que ℓ est la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (où que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ) et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

Démonstration. Supposons que ℓ et ℓ' sont des limites de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ avec $\ell \neq \ell'$. L'espace X est séparé, donc il existe $V \in \mathcal{V}(\ell)$ et $W \in \mathcal{V}(\ell')$ tel que $V \cap W = \emptyset$. On sait que ℓ est une limite de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, donc il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in V$. De même, ℓ' est une limite de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, donc il existe un autre rang $N' \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $x_n \in W$. Avec $n = \max(N, N')$, on obtient $x_n \in V \cap W$, ce qui est absurde, donc $\ell = \ell'$. $\square$

Remarque 1.4.7. On réserve la notation $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$ au cas des espaces séparés.

Exemple 1.4.8. L'exemple le plus simple d'espace non séparé est X ayant au moins deux éléments muni de la topologie grossière. Si $x \in X$, alors il n'admet qu'un seul voisinage : X . Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans X , tout point x de X est une limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il n'y a donc pas unicité.

Un espace non séparé n'a pas assez d'ouverts. En algèbre et en géométrie algébrique, on utilise la topologie de Zariski qui n'est pas séparé et donc pas métrisable.

On énonce maintenant un résultat pour les espaces métriques qui admettent diverses généralisations.

Proposition 1.4.9. Soit (X, d) un espace métrique. Soit A une partie de X et $x \in X$. On a équivalence :

- (i) $x \in \overline{A}$;
- (ii) il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A dont x est limite.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i). On suppose que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans A qui converge vers x dans X . Soit V un voisinage de x dans X . Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in V$. En particulier, $x_N \in V \cap A$, donc $V \cap A \neq \emptyset$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). On suppose $x \in \overline{A}$. On utilise que $\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ est une base de voisinages de x . Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on a $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ par hypothèse. On choisit $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. On a alors construit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ dans A . Vérifions que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. Soit V un voisinage de x . On sait que $\mathcal{B}_x$ est une base, donc il existe $N \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $B(x, \frac{1}{N}) \subset V$. Pour $n \geq N$, on a alors $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x, \frac{1}{N}) \subset V$. $\square$

Remarque 1.4.10. • L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est vraie dans tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$ (on n'a même pas besoin de supposer séparé).

• En revanche, pour (i) $\Rightarrow$ (ii) on utilise que tout point de X admet une base dénombrable de voisinages, ce qui est le cas dans les espaces métriques.

C'est un phénomène général : dans un espace métrique, on peut caractériser les propriétés topologiques en utilisant des suites. Ce n'est plus le cas avec un espace topologique quelconque.

1.5 Continuité

Définition 1.5.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et soit $a \in X$. On dit qu'une application $f: X \rightarrow Y$ est *continue* au point a lorsque l'image réciproque de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a :

$$(\forall W \in \mathcal{V}(f(a))) \quad f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(a).$$

Proposition 1.5.2. Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques, $a \in X$ et $f: X \rightarrow Y$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue au point a ;
- (ii) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) (\forall x \in X) d(x, a) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$;
- (iii) (*continuité séquentielle en a*) pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X convergeant vers a , la suite image $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (iii). On suppose f continue en a . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge vers a . Soit W un voisinage de $f(a)$. L'application f est continue en a , donc $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a . Mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in f^{-1}(W)$. On a alors que pour tout $n \geq N$, $f(x_n) \in W$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Procédons par contraposée : on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in X$ tel que $d(x, a) < \alpha$ et $d'(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$ (il est donc facile de voir que $x \in B(a, \alpha)$ et $f(x) \notin B(f(a), \varepsilon)$). Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique avec $\alpha = \frac{1}{n+1}$. Il existe $x_n \in X$ tel que $x_n \in B(a, \frac{1}{n+1})$ et $f(x_n) \notin B(f(a), \varepsilon)$. On a alors que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a . Si V est voisinage de a , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $B(a, \frac{1}{N+1}) \subset V$ car $\{B(a, \frac{1}{n+1}); n \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinages de a , donc pour tout $n \geq N$, $x_n \in V$. Cependant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \notin B(f(a), \varepsilon)$ et ainsi, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$. On a donc montré la négation de (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on a : $d(x, a) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Soit W un voisinage de $f(a)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(a), \varepsilon) \subset W$. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que $x \in B(a, \alpha) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$. On a donc $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \subset f^{-1}(W)$. C'est donc un voisinage de a . $\square$

Remarque 1.5.3. (1) Là encore, (i) $\Rightarrow$ (iii) est vraie pour tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$. Par contre, (iii) $\Rightarrow$ (i) utilise l'existence d'une base dénombrable de voisinages de a .

(2) L'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) a la conséquence suivante, dans un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente définie par $x_0 \in X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{n+1} = f(x_n)$ où $f: X \rightarrow X$ est une application. Si ℓ est limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$.

Théorème 1.5.4 (TRANSITIVITÉ DE LA CONTINUITÉ). Soient $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ et $(Z, \mathcal{T}'')$ trois espaces topologiques. Si $f: X \rightarrow Y$ est continue en a et $g: Y \rightarrow Z$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

Démonstration. Soit W un voisinage de $g \circ f(a)$ dans Z . L'application g est continue en $f(a)$, donc $g^{-1}(W)$ est un voisinage de $f(a)$. Puis f est continue en a , donc $f^{-1}(g^{-1}(W))$ est un voisinage de a et $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$. $\square$

Proposition 1.5.5 (FONCTIONS NUMÉRIQUES). Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $f, g: X \rightarrow \mathbf{K}$ deux applications. Si f et g sont continues en $a \in X$, alors $f + g$, λf et f/g sont continues en a (pour $\lambda \in \mathbf{K}$) et si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a .

Démonstration. On munit $\mathbf{K}^2$ de la norme $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. Si f et g sont continues en a , alors l'application :

$$(f, g): X \rightarrow \mathbf{K}^2 \\ x \mapsto (f(x), g(x))$$

est continue en a . En effet, soit $\varepsilon > 0$, notons $h = (f, g)$,

$$\begin{aligned} h^{-1}(\mathcal{B}(h(a), \varepsilon)) &= h^{-1}(\{x \in X; \|h(x) - h(a)\|_\infty < \varepsilon\}) \\ &= h^{-1}(\{x \in X; |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ et } |g(x) - g(a)| < \varepsilon\}) \\ &= f^{-1}(\mathcal{B}(f(a), \varepsilon)) \cap g^{-1}(\mathcal{B}(g(a), \varepsilon)) \end{aligned}$$

qui est une intersection de deux voisinages de a par continuité de f et g en a , donc c'est un voisinage de a . Par ailleurs, $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont continues en tout point de $\mathbf{K}^2$, et $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ est continue en tout point de $\mathbf{K} \times \mathbf{K}^*$. On conclut avec la transitivité de la continuité. Pour λf , on dit que les fonctions constantes sont continues. $\square$

Remarque 1.5.6. En particulier, les fonctions polynômes sont continues en tout point de $\mathbf{K}$. De plus, les fractions rationnelles sont continues en tout point de leur domaine de définition.

On va maintenant considérer la continuité globale.

Définition 1.5.7. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f: X \rightarrow Y$ est *continue sur* X lorsqu'elle est continue en tout point de X . On note $\mathcal{C}^0(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y .

Théorème 1.5.8. Pour deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ et $f: X \rightarrow Y$ une application, on a équivalence :

- (i) f est continue sur X ;
- (ii) l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert de X : $(\forall V \in \mathcal{T}') f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$;
- (iii) l'image réciproque de tout fermé est un fermé de X .

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). On suppose f continue sur X . Soit V un ouvert de Y . On montre que $f^{-1}(V)$ est voisinage de chacun de ses points. Si $a \in f^{-1}(V)$, alors V est un ouvert contenant $f(a)$, donc est un voisinage de $f(a)$. Or f est continue en a , donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a i.e. $f^{-1}(V)$ est bien ouvert.

(ii) $\Rightarrow$ (i). On suppose que pour tout $V \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Soit $a \in X$. Soit W un voisinage de $f(a)$. Il existe un ouvert V tel que $f(a) \in V \subset W$, alors $f^{-1}(V)$ est ouvert et $a \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$, ce qui montre que $f^{-1}(W)$ est bien un voisinage de a .

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Évident par passage au complémentaire : $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. $\square$

Remarque 1.5.9. (1) Attention ! La continuité de f n'entraîne pas $f(U) \in \mathcal{T}'$ pour $U \in \mathcal{T}$ ni $f(F) \in \mathcal{F}'$ pour $F \in \mathcal{F}$. Par exemple,

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto x^2$$

envoie l'ouvert $] - 1, 1[$ sur $[0, 1[$ qui n'est ni un ouvert ni un fermé. De même,

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \arctan(x)$$

envoie le fermé $\mathbf{R}$ sur l'ouvert $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(2) Les propriétés de transitivité et des fonctions numériques sont encore vraies pour la continuité globale.

Définition 1.5.10. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On appelle *homéomorphisme* toute bijection $f: X \rightarrow Y$ telle que f et f^{-1} soient continues.

Si f est un homéomorphisme, l'image réciproque et l'image $(f(U) = (f^{-1})^{-1}(U))$ d'un ouvert est un ouvert. Ainsi, un homéomorphisme établit une bijection entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.

Exemple 1.5.11. (1) On prend $X = [0, 1[\cup [2, 3]$ et on considère :

$$f: X \rightarrow [0, 2] \\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

L'application f est une bijection continue mais f^{-1} n'est pas continue en 1, donc f n'est pas un homéomorphisme.

(2) Si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$, on a un homéomorphisme entre $\mathbf{R}$ et $]a, b[$:

$$\mathbf{R} \rightarrow]a, b[\\ x \mapsto \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\pi} \arctan(x)$$

On a vu que si (Y, d') est un espace métrique et X un ensemble, alors l'ensemble des applications bornées $\mathcal{F}_b(X, Y)$ peut être muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme. Si on munit X d'une topologie $\mathcal{T}$, on peut considérer l'ensemble des applications continues bornées $X \rightarrow Y$:

$$\mathcal{C}_b^0(X, Y) = \mathcal{C}^0(X, Y) \cap \mathcal{F}_b(X, Y).$$

Théorème 1.5.12 (UNE LIMITE UNIFORME D'UNE SUITE DE FONCTIONS CONTINUES EST CONTINUE). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et (Y, d') un espace métrique. Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de $\mathcal{C}_b^0(X, Y)$ qui admet une limite $f \in \mathcal{F}_b(X, Y)$ pour la distance d_∞ , alors $f \in \mathcal{C}_b^0(X, Y)$.

Remarque 1.5.13. Ce résultat dit que $\mathcal{C}_b^0(X, Y)$ est fermé dans $\mathcal{F}_b(X, Y)$. En effet, soit (M, d) un espace métrique et $A \subset M$. D'après le corollaire 1.3.5, A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$. De plus, d'après la proposition 1.4.9, pour $x \in M$, on a $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans A qui converge vers x dans M , donc A est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de A convergeant vers un $x \in M$, alors $x \in A$.

Ici, on applique ce critère à $M = \mathcal{F}_b(X, Y)$ et $A = \mathcal{C}_b^0(X, Y)$.

Démonstration. Soit $a \in X$ et $\varepsilon > 0$. On veut vérifier que $f^{-1}(\mathcal{B}(f(a), \varepsilon))$ est voisinage de a . On écrit la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$: il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $d_\infty(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. L'application f_N est continue en a i.e. $W := f_N^{-1}(\mathcal{B}(f_N(a), \frac{\varepsilon}{3}))$ est un voisinage de a . On va montrer que $W \subset f^{-1}(\mathcal{B}(f(a), \varepsilon))$. Si $x \in W$, alors $d'(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(a)) &\leq d'(f(x), f_N(x)) + d'(f_N(x), f_N(a)) + d'(f_N(a), f(a)) \\ &< 2d_\infty(f, f_N) + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

On a alors $x \in f^{-1}(\mathcal{B}(f(a), \varepsilon))$, qui est bien un voisinage de a . □

1.6 Comparaison de topologies

On peut mettre une relation d'ordre sur les topologies définies sur un ensemble fixé.

Définition 1.6.1. Sur un ensemble X , on dit que la topologie $\mathcal{T}$ est *plus fine* que la topologie $\mathcal{T}'$ lorsque $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ (i.e. $\mathcal{T}$ a plus d'ouverts que $\mathcal{T}'$).

Exemple 1.6.2. (1) La topologie grossière $\{\emptyset, X\}$ est la moins fine de toutes les topologies.

(2) La topologie discrète $\mathcal{P}(X)$ est la plus fine de toutes les topologies.

(3) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. La topologie induite $\mathcal{T}_A$ sur A par $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine qui rend l'inclusion $i: A \hookrightarrow X$ continue. En effet, pour que i soit continue, il faut que $i^{-1}(U)$ soit un ouvert pour tout $U \in \mathcal{T}$, mais $i^{-1}(U) = A \cap U$, donc la topologie sur A doit contenir $\mathcal{T}_A$ i.e. être plus fine que $\mathcal{T}_A$.

Proposition 1.6.3. Sur un ensemble X , la topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}'$ si et seulement si $\text{Id}: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ est continue.

Démonstration. On a les équivalences

$$\begin{aligned} \text{Id}: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}') \text{ est continue} &\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{T}') \text{ Id}^{-1}(U) \in \mathcal{T} \\ &\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{T}') U \in \mathcal{T} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{T} \text{ plus fine que } \mathcal{T}'. \end{aligned}$$

□

Définition 1.6.4. On dit que deux distances d et d' sur un ensemble X sont *topologiquement équivalentes* lorsqu'elles induisent la même topologie.

Proposition 1.6.5. Soient d et d' deux distances sur un ensemble X . La topologie de (X, d) est plus fine que celle de (X, d') si et seulement si, pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{aligned} (X, d) &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ y &\mapsto d'(x, y) \end{aligned}$$

est continue en x , *i.e.*

$$(\forall x \in X) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) (\forall y \in X) d(x, y) < \alpha \Rightarrow d'(x, y) < \varepsilon.$$

Démonstration. On écrit simplement la continuité de $\text{Id}: (X, d) \rightarrow (X, d')$ en tout point $x \in X$. □

Définition 1.6.6. Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de E sont *métriquement équivalentes* lorsqu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que :

$$(\forall x \in E) \quad \alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|.$$

Exemple 1.6.7. (1) Sur $\mathbf{K}^n$, les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. On peut en fait montrer que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

(2) Sur $\mathcal{C}_b^0([0, 1], \mathbf{K})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Il est clair que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}_b^0([0, 1], \mathbf{K})$ qui n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. En effet, regardons la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions définie par

$$\begin{aligned} f_n: [0, 1] &\rightarrow \mathbf{K} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases} \end{aligned}$$

On a que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$, donc $\frac{\|\cdot\|_1}{\|\cdot\|_\infty}$ n'est pas uniformément minoré.

Proposition 1.6.8. Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E . La topologie de $(E, \|\cdot\|)$ est plus fine que celle de $(E, \|\cdot\|')$ si et seulement si il existe une constante $M > 0$ tel que :

$$(\forall x \in E) \quad \|x\|' \leq M\|x\|.$$

Démonstration. • On suppose que la topologie de $(E, \|\cdot\|)$ est plus fine que celle de $(E, \|\cdot\|')$. La boule ouverte $B_{\|\cdot\|'}(0, 1)$ est aussi ouverte pour $\|\cdot\|$ par hypothèse. On écrit que c'est un voisinage de 0 pour $\|\cdot\|$. Il existe $\rho > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|}(0, \rho) \subset B_{\|\cdot\|'}(0, 1)$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On considère $y = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|}$ de sorte que $\|y\| = \frac{\rho}{2} < \rho$, donc $y \in B_{\|\cdot\|}(0, \rho)$, d'où $y \in B_{\|\cdot\|'}(0, 1)$. De plus, $\frac{\rho}{2\|x\|} \|x\|' = \|y\|' < 1$. On obtient $\|x\|' \leq M\|x\|$ avec $M = \frac{\rho}{2}$ (ce qui est aussi vrai pour $x = 0$).

• On suppose que l'on a $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|' \leq M\|x\|$. Pour tout $y \in E$, $\|x - y\|' \leq M\|x - y\|$. Cela dit que $\text{Id}: (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|')$ est continue en tout point $x \in E$. En effet, pour $\varepsilon > 0$, on prend $\alpha = \frac{\varepsilon}{M}$ et on a alors

$$\|y - x\| < \alpha \Rightarrow \|y - x\|' \leq M\|y - x\| < M\alpha = \varepsilon.$$

Ainsi, la topologie de $\|\cdot\|$ est plus fine que celle de $\|\cdot\|'$. □

Une conséquence est que pour les normes, il n'y a pas de distinction entre équivalence topologique et équivalence métrique.

Corollaire 1.6.9. Deux normes sur un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E sont métriquement équivalentes si et seulement si les distances associées sont topologiquement équivalentes.

Démonstration. On applique deux fois la proposition 1.6.8. □

1.7 Topologie produit

On considère n espaces topologiques $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$. Notre objectif est de définir la topologie produit sur $X_1 \times \dots \times X_n$.

Lemme 1.7.1. Si

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_n; U_i \in \mathcal{T}_i \text{ pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

alors il existe une topologie sur $\prod_{i=1}^n X_i$ avec $\mathcal{B}$ comme base d'ouverts.

Démonstration. On applique la proposition 1.2.16. Il suffit de vérifier :

- L'union des éléments de $\mathcal{B}$ est $X_1 \times \dots \times X_n$: vrai car $X_1 \times \dots \times X_n \in \mathcal{B}$;
- L'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est une union d'éléments de $\mathcal{B}$: soient $U_1 \times \dots \times U_n$ et $V_1 \times \dots \times V_n$ dans $\mathcal{B}$ (avec U_i et V_i ouvert dans X_i) :

$$(U_1 \times \dots \times U_n) \cap (V_1 \times \dots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \dots \times (U_n \cap V_n) \in \mathcal{B}.$$

□

Définition 1.7.2. On appelle *topologie produit* sur $\prod_{i=1}^n X_i$ la topologie donnée par la base d'ouverts :

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^n U_i; U_i \in \mathcal{T}_i \text{ pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

On note $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i$ cette topologie. On appelle *ouvert élémentaire* tout élément de $\mathcal{B}$.

Exemple 1.7.3. La topologie sur $\mathbf{K}^n$ est associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$. En effet, la boule ouverte $B_{\|\cdot\|_\infty}((a_1, \dots, a_n), r)$ est l'ouvert élémentaire $B(a_1, r) \times \dots \times B(a_n, r)$. Réciproquement, tout ouvert élémentaire est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$ (exercice).

Par ailleurs, comme les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$, elles correspondent aussi à la topologie produit.

Proposition 1.7.4. Si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(A_i, \mathcal{T}_{A_i})$ est un sous-espace topologique de $(X_i, \mathcal{T}_i)$, alors la topologie induite par $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i$ sur $\prod_{i=1}^n A_i$ est la topologie produit $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_{A_i}$.

Démonstration. On identifie simplement les bases d'ouverts : les $\mathcal{T}_{A_i} = \{U_i \cap A_i; U_i \in \mathcal{T}_i\}$ sont les ouverts élémentaires pour $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_{A_i} : (U_1 \cap A_1) \times \dots \times (U_n \cap A_n)$, avec les $U_i \in \mathcal{T}_i$ ouverts élémentaires pour $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i :$

$U_1 \times \dots \times U_n$, pour $U_i \in \mathcal{T}_i$. La topologie induite sur $\prod_{i=1}^n A_i$ a pour base d'ouverts les $(U_1 \times \dots \times U_n) \cap (A_1 \times \dots \times A_n)$.

On conclut avec l'égalité

$$(U_1 \times \dots \times U_n) \cap (A_1 \times \dots \times A_n) = (U_1 \cap A_1) \times \dots \times (U_n \cap A_n).$$

□

On explique maintenant le choix de cette définition de topologie produit. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on note

$$p_j : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow X_j$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$$

la projection.

Proposition 1.7.5. La topologie produit $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i$ est la topologie la moins fine qui rend toutes les projections p_j continues.

Démonstration. • On vérifie qu'avec $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i$, la projection p_j est continue pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit U un ouvert de X_j ,

$$p_j^{-1}(U) = X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times U \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n$$

est un ouvert (élémentaire) pour $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i$.

• Minimalité : soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $\prod_{i=1}^n X_i$ telle que p_j soit continue pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $U_1 \in \mathcal{T}_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_n$. On sait que $p_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}$, donc

$$\bigcap_{j=1}^n p_j^{-1}(U_j) = U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{T}.$$

Ainsi, $\mathcal{T}$ contient les ouverts élémentaires, donc contient $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i$. □

On peut caractériser simplement la continuité d'une application à valeurs dans un produit.

Proposition 1.7.6. Soient $(X, \mathcal{T}), (Y_1, \mathcal{T}'_1), \dots, (Y_n, \mathcal{T}'_n)$ des espaces topologiques. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note p'_j la projection $\prod_{i=1}^n Y_i \rightarrow Y_j$. Pour qu'une application $f: X \rightarrow \prod_{i=1}^n Y_i$ soit continue, il faut et il suffit que toutes ses composantes $p'_j \circ f: X \rightarrow Y_j$ soient continues.

Démonstration. • Si f est continue, alors $p'_j \circ f$ aussi par transitivité.

• On suppose $p'_j \circ f$ continue pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On veut montrer que l'image réciproque d'un ouvert par f est un ouvert. Il suffit de le vérifier pour les ouverts élémentaires. Soit $V_1 \in \mathcal{T}'_1, \dots, V_n \in \mathcal{T}'_n$.

$$f^{-1}(V_1 \times \cdots \times V_n) = \{x \in X; p'_j(f(x)) \in V_j \ (\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket)\} = \bigcap_{j=1}^n (p'_j \circ f)^{-1}(V_j)$$

qui est une intersection finie d'ouverts, donc est un ouvert. □

Exemple 1.7.7. Dans $M_n(\mathbf{K})$, le produit des matrices $M_n(\mathbf{K})^2 \rightarrow M_n(\mathbf{K})$ définit une application continue. En effet, pour $(A, B) \in M_n(\mathbf{K})^2$ avec $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$, les composantes des produits AB sont les $\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$. Il s'agit d'une somme de produits d'applications continues. Toutes les composantes sont continues, donc $(A, B) \rightarrow AB$ est continue.

Proposition 1.7.8. Une suite $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ dans un espace topologique $(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i)$ a pour limite $y = (y_1, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$ si et seulement si toutes ses composantes $(x_{k,i})_{k \in \mathbf{N}}$ ont pour limite $y_i \in X_i$ pour la topologie $\mathcal{T}_i$ (pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$).

Démonstration. • Si $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ a pour limite y , alors $(p_i(x_k))_{k \in \mathbf{N}}$ a pour limite $p_i(y) = y_i$ car p_i est continue en y et $p_i(x_k) = x_{k,i}$.

• On suppose que pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(x_{k,i})_{k \in \mathbf{N}}$ a pour limite y_i . Soit W un voisinage de y , W contient un ouvert contenant y . Cet ouvert contient un ouvert élémentaire $U_1 \times \cdots \times U_n$ contenant y . L'ouvert U_i est un voisinage de y_i : par hypothèse, il existe N_i tel que pour tout $k \geq N_i$, $x_{k,i} \in U_i$. On prend $N = \max_{1 \leq i \leq n} N_i$. On a alors que pour tout $k \leq N$, $x_k \in U_1 \times \cdots \times U_n \subset W$. □

Définition 1.7.9. Soit $X = \prod_{i=1}^n X_i$ un produit d'ensemble, Y un ensemble et $f: X \rightarrow Y$. Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in X$ et $J \subset \{1, \dots, n\}$, on note $f_{a,J}$ l'application partielle définie par :

$$f_{a,J}: \prod_{i \in J} X_i \rightarrow Y$$

$$(x_i)_{i \in J} \mapsto f(y_1, \dots, y_n)$$

$$\text{avec } y_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in J \\ a_i & \text{si } i \notin J \end{cases}.$$

Exemple 1.7.10. Avec $n = 2$, a_1, a_2 fixés, on a $(x_1) \rightarrow f(x_1, a_2)$ et $(x_2) \rightarrow f(a_1, x_2)$.

Le résultat suivant fait un lien entre la continuité d'une application définie sur un produit et celle de ses applications partielles.

Proposition 1.7.11. On munit $X = \prod_{i=1}^n X_i$ de la topologie produit et soit $(Y, \mathcal{T}')$ un espace topologique. Si l'application $f: X \rightarrow Y$ est continue au point $a = (a_1, \dots, a_n)$, alors pour tout $J \subset \{1, \dots, n\}$, l'application partielle $f_{a,J}$ est continue au point $(a_i)_{i \in J}$.

Démonstration. On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi: \prod_{i=1}^n X_i &\rightarrow \prod_{i=1}^n X_i \\ (x_i)_{i \in J} &\mapsto (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

avec $y_i = x_i$ si $i \in J$ ou a_i si $i \notin J$. On a alors que $f_{a,J} = f \circ \phi$. On vérifie que ϕ est continue en $(a_i)_{i \in J}$. Il suffit que ses composantes soient continues. Si $i \in J$, la composante numéro i est une projection. Si $i \notin J$, cette composante est constante. Tout est continu dans tous les cas. L'application ϕ est continue en $(a_i)_{i \in J}$. Par transitivité, $f_{a,J} = f \circ \phi$ est continue. $\square$

Remarque 1.7.12. Attention ! La réciproque est fautive. L'exemple typique est $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Les applications partielles $f(*, 0)$ et $f(0, *)$ sont nulles, donc continues. Par contre, si $\alpha \in \mathbf{R}^*$ fixé,

$$f(x, \alpha x) = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

ne converge pas vers 0 lorsque x tend vers 0, donc f n'est pas continue en 0.

On a défini la topologie produit sur un produit d'espaces métriques. On peut se demander si cette topologie est métrisable.

Proposition 1.7.13. La topologie produit d'un produit fini d'espaces métriques est métrisable.

Démonstration. Soient $(X_1, \delta_1), \dots, (X_n, \delta_n)$ des espaces métriques. On va vérifier que la topologie produit, notée $\mathcal{T}$ sur $X = \prod_{i=1}^n X_i$ est donnée par la distance :

$$d_\infty: (x, y) \rightarrow \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \delta_i(x_i, y_i)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$. La projection $p_i: (X, d_\infty) \rightarrow X_i$ est continue car $\delta_i(x_i, y_i) \leq d_\infty(x, y)$. Les composantes de $\text{Id}: (X, d_\infty) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ sont donc continues. D'après la proposition 1.7.6, $\text{Id}: (X, d_\infty) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ est continue. Il reste à voir que $\text{Id}^{-1}: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, d_\infty)$ est continue. Il suffit de voir qu'une boule ouverte $B_{d_\infty}(a, r)$ est ouverte pour $\mathcal{T}$, où $a = (a_1, \dots, a_n) \in X$ et $r > 0$. Mais $B_{d_\infty}(a, r) = B_{\delta_1}(a_1, r) \times \dots \times B_{\delta_n}(a_n, r)$ est un ouvert élémentaire. $\square$

Lemme 1.7.14. Un produit d'espaces séparés est séparé.

Démonstration. Soient $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ des espaces topologiques séparés. Soient

$x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $X = \prod_{i=1}^n X_i$, on suppose $x \neq y$. Il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i \neq y_i$. Chaque X_i est séparé, donc il existe $U \in \mathcal{T}_i$ et $V \in \mathcal{T}_i$ tel que $x_i \in U$, $y_i \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. On prend

$$U_1 = X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$$

et

$$V_1 = X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times V \times X_{i+1} \times \dots \times X_n.$$

On a alors que U_1 est un voisinage de x dans X et V_1 est un voisinage de y dans X . De plus, on a $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. $\square$

Théorème 1.7.15. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$ est fermée dans X^2 (muni de la topologie produit).

Démonstration. • On suppose X séparé. Montrons que $X^2 \setminus \Delta$ est ouvert, en fait qu'il est voisinage de chacun de ses points. Soit $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta$, alors $x \neq y$. Par hypothèse, il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$, alors $U \times V \subset X^2 \setminus \Delta$ car $U \cap V = \emptyset$, donc $U \times V$ est un voisinage de (x, y) , contenu dans $X^2 \setminus \Delta$, d'où $X^2 \setminus \Delta$ est un voisinage de (x, y) .

• On suppose Δ fermée dans X^2 . Soient x, y deux points distincts de X : $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta$ qui est ouvert, donc union d'ouverts élémentaires. Il existe un ouvert élémentaire $U \times V$ tel que $(x, y) \in U \times V \subset X^2 \setminus \Delta$. On a alors que U est voisinage de x , V est voisinage de y et $U \cap V = \emptyset$ car $U \times V \subset X^2 \setminus \Delta$. $\square$

Corollaire 1.7.16. Soient $f, g: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ deux applications continues avec Y séparé. La partie $F = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ est alors fermée dans X .

Démonstration. On regarde l'application

$$\begin{aligned} h: X &\rightarrow Y^2 \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

Cette application h est continue car ses composantes f et g sont continues et

$$F = \{x \in X; (f(x), g(x)) \in \Delta\} = h^{-1}(\Delta)$$

où Δ est la diagonale de Y^2 et Δ est fermée, donc F aussi. $\square$

2 Connexité

De façon intuitive, un espace topologique connexe est un espace topologique « fait d'un seul morceau ».

2.1 Définitions, exemple fondamental

Définition 2.1.1. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *connexe* lorsque les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont X et $\emptyset$. On dit qu'une partie A de X est connexe lorsque $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe.

Cela revient à dire que X n'est pas l'union disjointe de deux ouverts (resp. fermés) non vides.

Proposition 2.1.2. Une partie A de X est connexe si et seulement si il existe deux ouverts U_1 et U_2 de X tels que

$$A \subset U_1 \cup U_2 \text{ et } A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset \text{ entraîne } A \subset U_1 \text{ ou } A \subset U_2.$$

Démonstration. • On suppose A connexe. Soient U_1 et U_2 ouverts de X tels que $A \subset U_1 \cup U_2$ et $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, alors $A \cap U_1$ et $A \cap U_2$ sont des ouverts de A , disjoints et de réunion A . Le fait que A soit connexe entraîne $A \cap U_1 = \emptyset$ ou $A \cap U_2 = \emptyset$ i.e. $A \subset U_2$ ou $A \subset U_1$.

• On suppose U_1 et U_2 ouverts tel que $A \subset U_1 \cup U_2$ et $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ entraîne $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2$. Soient V_1 et V_2 deux ouverts disjoints de A tels que $A = V_1 \cup V_2$ où chaque V_i est de la forme $V_i = A \cap U_i$ avec U_i ouvert de X . On a alors $V_1 \cup V_2 = A$ tel que $A \subset U_1 \cup U_2$ et $\emptyset = V_1 \cap V_2 = A \cap U_1 \cap U_2$. Par hypothèse, cela entraîne que si $A \subset U_1$, alors $V_2 = \emptyset$ et si $A \subset U_2$, alors $V_1 = \emptyset$. $\square$

Définition 2.1.3. Un *intervalle* de $\mathbf{R}$ est une partie I de $\mathbf{R}$ telle que pour tout $(a, b) \in I^2$, $[a, b] \subset I$.

En prenant les bornes sup et inf, on voit que cette définition coïncide avec la définition habituelle, c'est-à-dire

$$[a, b] \text{ ou }]a, b[\text{ ou } [a, b[\text{ ou }]a, b[\text{ ou } [a, +\infty[\text{ ou }]a, +\infty[\text{ ou }]-\infty, b[\text{ ou }]-\infty, b[\text{ ou } \mathbf{R} \text{ ou } \emptyset$$

(exercice).

Théorème 2.1.4. Une partie de $\mathbf{R}$ est connexe si et seulement si c'est un intervalle.

Démonstration. • Soit A une partie connexe de $\mathbf{R}$. Soient $(a, b) \in A^2$ et $x \in \mathbf{R}$ tels que $a < x < b$. Supposons $x \notin A$. Les parties $U_1 =]-\infty, x[$ et $U_2 =]x, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbf{R}$. On a $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $A \subset U_1 \cup U_2$. Par connexité, $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2$. Si on suppose que $A \subset U_1$, cela contredit le fait que $b \in A$. De même, si on suppose que $A \subset U_2$, cela contredit le fait que $a \in A$. On obtient alors dans les deux cas une contradiction, donc $x \in A$ i.e. A est un intervalle.

• On suppose que I est un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbf{R}$ tels que I soit l'union disjointe de $I \cap U_1$ et $I \cap U_2$. Supposons $I \cap U_2$ non vide. On veut montrer que $I \cap U_1 = \emptyset$. On choisit $x \in I \cap U_2$. On considère $V =]-\infty, x[\cap I \cap U_1$. Par l'absurde, supposons V non vide et on choisit $v \in V$. On utilise qu'une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure. Ici, V est non vide et majorée par x . On note alors $a = \sup V$. On a alors $v \leq a \leq x$, mais comme I est un intervalle et que $(v, x) \in I^2$, on a donc $a \in I$, d'où $a \in I \cap U_1$ ou $a \in I \cap U_2$. Supposons $a \in I \cap U_1$, alors comme $x \in U_2$, on a $a \neq x$, donc $a < x$ et $a \in V$. La partie $U_1 \cap]-\infty, x[$ est un ouvert de $\mathbf{R}$ contenant a , donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset U_1 \cap]-\infty, x[$. Comme $a < x$ et $x \notin U_1$, alors $x \notin]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, donc $x \geq a + \varepsilon$. Mais I contient a et x , donc contient $a + \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui contredit le fait que a doit majorer cet élément de V , donc $a \notin I \cap U_1$. On a alors $a \in I \cap U_2$. La partie U_2 est ouverte, donc il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $]a - \varepsilon', a + \varepsilon'[\subset U_2$. Comme $I \cap U_1$ et U_2 sont disjoints, alors $]a - \varepsilon', a + \varepsilon'[\cap V = \emptyset$, donc $a - \frac{\varepsilon'}{2}$ est un majorant de V , ce qui contredit la minimalité de a . On a finalement montré que V est vide. De même, en travaillant avec la borne inférieure, on vérifie que $I \cap U_1 \cap]x, +\infty[$ doit être vide et on conclut que $I \cap U_1$ est vide. $\square$

Exemple 2.1.5. (1) L'ensemble $\mathbf{Q}$ est inclus dans l'union des ouverts disjoints $] - \infty, \sqrt{2}[$ et $]\sqrt{2}, +\infty[$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$), sans être contenu dans les deux, donc $\mathbf{Q}$ n'est pas connexe.

(2) Avec le même découpage, on voit que $[0, 1] \cup [2, 3]$ n'est pas connexe. En utilisant le théorème précédent, il suffit de dire que ce ne sont pas des intervalles.

2.2 Fonctions continues et connexité

Théorème 2.2.1. L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Démonstration. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques avec X connexe. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Soient V_1 et V_2 deux ouverts de Y tels que $f(X) \subset V_1 \cup V_2$ et $f(X) \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Les parties $f^{-1}(V_1)$ et $f^{-1}(V_2)$ sont des ouverts de X (puisque f est continue) avec $f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) = X$ et $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$. Comme X est connexe, on a $f^{-1}(V_1) = X$ ou $f^{-1}(V_2) = X$, d'où $f(X) \subset V_1$ ou $f(X) \subset V_2$. Finalement, $f(X)$ est bien connexe. $\square$

Corollaire 2.2.2 (THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique connexe et $f \in \mathcal{C}^0(X, \mathbf{R})$, alors $f(X)$ est un intervalle.

Le résultat suivant donne une autre caractérisation de la connexité.

Proposition 2.2.3. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe si et seulement si toute application continue $X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante ($\{0, 1\}$ est vu ici comme partie de $\mathbf{R}$ muni de la topologie discrète).

Démonstration. • Supposons X connexe. Soit $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Les singletons $\{0\}$ et $\{1\}$ sont ouverts dans $\{0, 1\}$, donc $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont ouverts dans X qui est l'union disjointe de $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$. Par connexité, on a donc $f^{-1}(\{0\}) = X$ ou $f^{-1}(\{1\}) = X$, d'où $f = 0$ ou $f = 1$.

• Supposons que toute application continue $X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante. Soit $A \subset X$ une partie ouverte et fermée. La fonction caractéristique de A

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A: X &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est continue car $\mathbf{1}_A^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$ et $\mathbf{1}_A^{-1}(\{1\}) = A$ sont ouverts. Par hypothèse, $\mathbf{1}_A$ est constante. Si $\mathbf{1}_A = 0$, alors $A = \emptyset$ et si $\mathbf{1}_A = 1$, alors $A = X$, ce qui conclut. $\square$

2.3 Union, adhérence et produit

Théorème 2.3.1. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Si on suppose qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

Démonstration. Posons $B = \bigcup_{i \in I} A_i$. Supposons que U_1 et U_2 sont deux ouverts de X tel que $B \subset U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2 \cap B = \emptyset$. Pour $i \in I$, on a $A_i \subset B$, donc $A_i \subset U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2 \cap A_i = \emptyset$. Comme A_i est connexe, on a $A_i \cap U_1 = \emptyset$ ou $A_i \cap U_2 = \emptyset$. En particulier, pour $i = i_0$, $A_{i_0} \cap U_1 = \emptyset$ ou $A_{i_0} \cap U_2 = \emptyset$. Par symétrie, supposons $A_{i_0} \cap U_1 = \emptyset$, alors $A_{i_0} \subset U_2$. Soit $i \in I$. Si $A_i \cap U_2 = \emptyset$, alors $A_i \subset U_1$, donc $A_{i_0} \cap A_i \subset A_{i_0} \cap U_1$ ce qui contredit $A_{i_0} \cap U_1 = \emptyset$, donc $A_i \cap U_1 = \emptyset$. Finalement, $B \cap U_1 = \emptyset$. $\square$

Une application du résultat précédent est que pour tout point x d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, l'union de toutes les parties connexes de X contenant x est connexe (on applique le théorème avec $A_{i_0} = \{x\}$). C'est le plus grand connexe contenant x .

Définition 2.3.2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Pour tout point x de X , on appelle *composante connexe* de x et on note $C(x)$ le plus grand connexe contenant x .

Avec cette notation, deux points x et y appartiennent à une même partie connexe si et seulement si $C(x) = C(y)$: si $C(x) = C(y)$, alors x et y appartiennent au connexe $C(x)$. Réciproquement, si x et y appartiennent au connexe A , alors $A \subset C(x)$, donc $y \in C(x)$ donc $C(x) \subset C(y)$, puis $C(x) = C(y)$.

Proposition 2.3.3. La relation « appartenir à un même connexe » qui se traduit par $C(x) = C(y)$, est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes. Les composantes connexes forment donc une partition de X .

Remarque 2.3.4. D'un point de vue intuitif, les composantes connexes dans X sont les connexes « d'un seul tenant » de X . Par exemple, les composantes connexes de $[0, 1] \cup [2, 3]$ sont $[0, 1]$ et $[2, 3]$.

Théorème 2.3.5. Si une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe, alors $\overline{A}$ est connexe.

Démonstration. Soient F_1 et F_2 deux fermés de X tels que $\overline{A} \subset F_1 \cup F_2$ et $\overline{A} \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$. On sait que $A \subset \overline{A}$ donc $A \subset F_1 \cup F_2$ et $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$. De plus, A est connexe, donc $A \subset F_1$ ou $A \subset F_2$, soit $\overline{A} \subset F_1$ ou $\overline{A} \subset F_2$. $\square$

Corollaire 2.3.6. Les composantes connexes d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ sont des fermés.

Théorème 2.3.7. Un produit d'espaces connexes est connexe.

Démonstration. Par récurrence, il suffit de faire le cas d'un produit de deux espaces connexes $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$. On va utiliser la proposition 2.2.3. Soit $f: X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$ continue. Soit $x \in X$ fixé. L'application partielle $f(x, *): Y \rightarrow \{0, 1\}; y \mapsto f(x, y)$ est continue et Y est connexe, donc $f(x, *)$ est constante. Soit $y \in Y$. De même, $f(*, y): X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante. Cela implique que f est constante car si $(x, y), (x', y') \in X \times Y$, alors $f(x, y) = f(x, y') = f(x', y')$. $\square$

Corollaire 2.3.8. Dans $\mathbf{R}^n$, les pavés (i.e. les produits d'intervalles) sont connexes.

2.4 Connexité par arc

Dans cette section, on introduit une notion un peu plus forte que la connexité, qui est en fait plus facile à vérifier en pratique.

Définition 2.4.1. (i) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, on appelle *chemin* joignant $x \in X$ à $y \in X$ toute application continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

(ii) On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *connexe par arc* lorsque deux points quelconques de X peuvent être reliés par un chemin.

Théorème 2.4.2. Un espace topologique connexe par arc est connexe.

Démonstration. Soit $(X, \mathcal{T})$ connexe par arc. Soient x et y deux points de X . Par hypothèse, il existe un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ joignant x à y . L'intervalle $[0, 1]$ est connexe, donc $\gamma([0, 1])$ est connexe (car γ est continue) et il contient x et y , donc $C(x) = C(y)$, d'où pour tout $x \in X$, $C(x) = X$ et X est connexe. $\square$

Exemple 2.4.3. (1) Dans $\mathbf{R}^n$, une partie X de $\mathbf{R}^n$ est *convexe* lorsque : $(\forall (x, y) \in X^2) (\forall t \in [0, 1]) (1-t)x + ty \in X$. Les parties convexes sont connexes (car connexes par arc).

(2) Il y a des espaces connexes qui ne sont pas connexes par arc. Par exemple dans $\mathbf{R}^n$, l'ensemble $\Gamma = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) ; x \in \mathbf{R}_{>0}\}$ est connexe par arc, donc connexe. Son adhérence est encore connexe. Mais $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ n'est pas connexe par arc (exercice).

Remarque 2.4.4. On peut définir une relation d'équivalence « appartenir au même connexe par arc » et définir des composantes connexes par arc. Elles sont plus petites que les composantes connexes et elles ne sont pas nécessairement fermées (voir exemple précédent).

3 Compacité

La compacité sera définie comme une propriété de finitude topologique. On verra par exemple que dans un espace compact, un ensemble infini de points s'accumule toujours quelque part. On verra aussi que dans $\mathbf{R}^n$, les compacts sont les fermés bornés.

3.1 Définitions

Définition 3.1.1. Un *recouvrement* d'un ensemble X est une famille $(R_i)_{i \in I}$ de parties de X telle que $X = \bigcup_{i \in I} R_i$. On dit que ce recouvrement est fini lorsque I est fini. Si $(R_i)_{i \in J}$ avec $J \subset I$ est un recouvrement, on dit que $(R_i)_{i \in J}$ est un *sous-recouvrement* de $(R_i)_{i \in I}$.

Dans le cas topologique, on va parler de recouvrements ouverts.

Définition 3.1.2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ est *ouvert* lorsque : $(\forall i \in I) U_i \in \mathcal{T}$.

On peut maintenant définir les espaces compacts.

Définition 3.1.3. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *compact* lorsque :

- (i) il est séparé ;
- (ii) de tout recouvrement ouvert de X , on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, avec U_i ouverts,

alors il existe $J \subset I$ fini tel que $X = \bigcup_{i \in J} U_i$.

Une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dite compacte lorsque $(A, \mathcal{T}_A)$ avec la topologie induite est compacte.

Par passage au complémentaire, on a une définition équivalente avec les fermés.

Proposition 3.1.4. Un espace $(X, \mathcal{T})$ est compact si et seulement si il est séparé et de toute famille de fermés de X d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

Un cas utile est celui de fermés emboîtés.

Proposition 3.1.5 (FERMÉS EMBOÎTÉS). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace compact. Toute suite décroissante $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fermés non vides de X a une intersection non vide.

Démonstration. Par l'absurde, supposons $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n = \emptyset$. D'après ce qui précède, il existe $J \subset \mathbf{N}$ fini tel que $\bigcap_{n \in J} F_n = \emptyset$. Comme J est fini, on peut prendre $n_0 = \max(J)$, alors $F_{n_0} = \bigcap_{n \in J} F_n = \emptyset$, on a donc une contradiction. $\square$

Exemple 3.1.6. (1) Tout ensemble fini avec la topologie discrète est compact.

(2) L'ensemble $\mathbf{R}$ n'est pas compact puisque $\mathbf{R} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}}]n, n+2[$ et on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini.

3.2 Compacité des espaces métriques

Dans un espace métrique, on veut caractériser la compacité avec des suites.

Définition 3.2.1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Une *valeur d'adhérence* de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un point $x \in X$ tel que pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe une infinité d'indices $n \in \mathbf{N}$ tel que $x_n \in V$ i.e.

$$(\forall V \in \mathcal{V}(x)) (\forall n \in \mathbf{N}) (\exists N \geq n) \quad x_N \in V.$$

On dit que $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ est une *sous-suite* de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ lorsque $k: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ est strictement croissante.

Théorème 3.2.2 (BOLZANO-WEIERSTRASS). Soit (X, d) un espace métrique. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'ensemble X est compact.
- (ii) Toute suite de X admet une valeur d'adhérence.
- (iii) (*compacité séquentielle*). De toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de X , on peut extraire une sous-suite convergente.

On a besoin d'un résultat intermédiaire pour démontrer ce théorème.

Lemme 3.2.3 (DE LA MAILLE). Soit (X, d) un espace métrique vérifiant la compacité séquentielle. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Il existe alors $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in X$, la boule $B(x, \rho)$ est incluse dans l'un des U_i :

$$(\forall x \in X) (\exists i \in I) B(x, \rho) \subset U_i.$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, il existe $x_n \in X$ tel que $B(x_n, \frac{1}{n})$ ne soit incluse dans aucun des U_i . On applique l'hypothèse (iii) à la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Elle admet une sous-suite $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ convergente vers $\ell \in X$. Il existe $i \in I$ tel que $\ell \in U_i$ avec U_i ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$, tel que $B(\ell, \varepsilon) \subset U_i$. On écrit la définition de la limite : il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $d(x_{k(n)}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$. Prenons $n \geq n_0$ assez grand pour que $\frac{1}{k(n)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors $B(x_{k(n)}, \frac{1}{k(n)}) \subset B(\ell, \varepsilon) \subset U_i$. En effet, si $y \in B(x_{k(n)}, \frac{1}{k(n)})$, alors :

$$d(y, \ell) \leq d(y, x_{k(n)}) + d(x_{k(n)}, \ell) < \frac{1}{k(n)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui contredit la définition de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Ainsi, il existe $n_1 \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que pour tout $x \in X$, $B(x, \frac{1}{n_1})$ est incluse dans l'un des U_i . On prend $\rho = \frac{1}{n_1}$. $\square$

Démonstration du théorème 3.2.2. (i) $\Rightarrow$ (ii). On suppose que X est compact. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de X . On considère $X_n = \{x_k; k \geq n\}$. On a $X_{n+1} \subset X_n$. On prend l'adhérence $\overline{X}_{n+1} \subset \overline{X}_n$. La suite $(\overline{X}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc une suite décroissante de fermés non vides. On applique la proposition 3.1.5 et on peut choisir $x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{X}_n$.

On vérifie que x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$ et soit $n \in \mathbf{N}$, alors $x \in \overline{X}_n$, donc $X_n \cap V \neq \emptyset$. Il existe donc $k \geq n$ tel que $x_k \in V$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de X . Par hypothèse, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence $\ell \in X$. La boule $B(\ell, 1)$ est un voisinage de ℓ , donc il existe $k(1) \in \mathbf{N}$ tel que $x_{k(1)} \in B(\ell, 1)$. Supposons $k(n-1)$ construit pour $n \geq 2$. La boule $B(\ell, \frac{1}{n})$ est un voisinage de ℓ , donc il existe $k(n) > k(n-1)$ tel que $x_{k(n)} \in B(\ell, \frac{1}{n})$. Par récurrence, on a une sous-suite $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ telle que pour tout $n \geq 1$, $d(x_{k(n)}, \ell) < \frac{1}{n}$. La sous-suite $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ converge alors vers ℓ (on a utilisé que ℓ admet une base dénombrable de voisinages).

(iii) $\Rightarrow$ (i). On suppose (iii). L'ensemble X est séparé puisque c'est un espace métrique. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . D'après le lemme de la maille, il existe $\rho > 0$ tel que : $(\forall x \in X) (\exists i_x \in I) B(x, \rho) \subset U_{i_x}$. La famille $(B(x, \rho))_{x \in X}$ est un recouvrement de X . Par l'absurde, supposons qu'il n'admet pas de sous-recouvrement fini. On construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par récurrence. On choisit $x_0 \in X$. Soit $n \geq 0$, supposons $x_0, \dots, x_n$ construits. L'ensemble $\bigcup_{k=0}^n B(x_k, \rho)$ ne recouvre pas X . On choisit $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{k=0}^n B(x_k, \rho)$. Par construction, $d(x_n, x_k) \geq \rho$ pour tout n, k tel que $n > k$. On utilise (iii), la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une sous-suite $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ convergente vers $\ell \in X$. Pour tout n assez grand, $d(x_{k(n)}, \ell) < \frac{\rho}{2}$ et $d(x_{k(n+1)}, \ell) < \frac{\rho}{2}$. Pour un tel n , on a

$$\rho \leq d(x_{k(n+1)}, x_{k(n)}) \leq d(x_{k(n+1)}, \ell) + d(\ell, x_{k(n)}) < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$$

donc on a une contradiction. Ainsi, il existe $M \subset X$ fini tel que $X = \bigcup_{x \in M} B(x, \rho)$. Mais $B(x, \rho) \subset U_{i_x}$, donc $X = \bigcup_{x \in M} U_{i_x}$. $\square$

Remarque 3.2.4. (1) Pour (i) $\Rightarrow$ (ii), on n'a pas besoin de la structure métrique : la propriété (ii) est vraie dans tout espace topologique compact. En revanche, pour (ii) $\Rightarrow$ (iii), on utilise que tout point admet une base dénombrable de voisinages. Enfin, (iii) $\Rightarrow$ (i) repose sur le lemme de la maille qui se formule explicitement avec une distance.

(2) Une conséquence du théorème est que le lemme de la maille s'applique à tout espace métrique compact.

Corollaire 3.2.5. Tout espace métrique compact est séparable.

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$, $(B(x, \frac{1}{n}))_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X . On en extrait un sous-recouvrement fini $(B(x, \frac{1}{n}))_{x \in J_n}$ (avec J_n fini). L'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbf{N}_{>0}} J_n$ est alors une partie dénombrable et est dense dans X . En effet, soit $y \in X$ et $\varepsilon > 0$. On prend $n \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. On a alors $y \in \bigcup_{x \in J_n} B(x, \frac{1}{n})$, donc il existe $x \in J_n$ tel que $d(y, x) < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Ainsi, $x \in B(y, \varepsilon)$. $\square$

Voyons un exemple fondamental qui justifie l'intérêt de cette notion de compacité.

Théorème 3.2.6. Tout segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ est compact.

Démonstration. Montrons la compacité séquentielle de Bolzano-Weierstrass. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de $[a, b]$. On veut extraire une sous-suite $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ convergente par une méthode de dichotomie. On construit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par récurrence de sorte que pour chaque n , il existe une infinité d'indices $k \in \mathbf{N}$ tel que $x_k \in [a_n, b_n]$. On prend $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $k(0) = 0$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose a_n, b_n et $k(n)$ construits. On prend $k(n+1) > k(n)$ tel que $x_{k(n+1)} \in [a_n, b_n]$. On pose $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. S'il y a une infinité d'indices k tel que $x_k \in [a_n, c_n]$, alors on prend $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$. Sinon, on prend $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$. On construit ainsi deux suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ adjacentes : $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ croissante, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ décroissante et $(a_n - b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0 car $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Par la propriété de la borne supérieure dans $\mathbf{R}$, les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent et ont même limite, donc $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge aussi vers cette limite puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leq x_{k(n)} \leq b_n$. $\square$

3.3 Propriétés des compacts

Proposition 3.3.1. Dans un espace topologique séparé, une partie compacte est toujours fermée.

Démonstration. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et K un compact de X . Vérifions que $X \setminus K$ est ouvert. Soit $x \in X \setminus K$. Pour tout $y \in K$, on sépare x et y : il existe $V_y \in \mathcal{V}(x)$ et $U_y \in \mathcal{V}(y)$ tel que $V_y \cap U_y = \emptyset$. La famille $(U_y)_{y \in K}$ est alors un recouvrement ouvert du compact K . On extrait un sous-recouvrement fini : $(U_y)_{y \in J}$, avec $J \subset K$ fini. On considère $W = \bigcap_{y \in J} V_y$, qui est un voisinage de x , par intersection finie de voisinages de x . Par construction, $W \subset X \setminus K$, c'est donc un voisinage de tous ses points, c'est donc un ouvert. $\square$

Proposition 3.3.2. Si $(X, \mathcal{T})$ est compact et F fermé dans X , alors F est compact.

Démonstration. Tout d'abord, F est séparé. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de F . Posons $V = X \setminus F$ qui est ouvert, alors $X = V \cup \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)$. Comme X est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini, $X = V \cup \left(\bigcup_{i \in J} U_i \right)$ avec J fini. On a alors $F \subset V \cup \left(\bigcup_{i \in J} U_i \right)$ et même $F \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ car $F \cap V = \emptyset$. $\square$

Corollaire 3.3.3. (i) Dans un espace topologique compact, les compacts sont les fermés.

(ii) Une partie de $\mathbf{R}$ est compact si et seulement si elle est fermée bornée.

Démonstration. (i) Exercice.

(ii) • Soit A un compact de $\mathbf{R}$, alors A est fermé par la proposition 3.3.1. Par ailleurs, $A \subset \bigcup_{n \geq 1}]-n, n[$ qui est un recouvrement ouvert de $\mathbf{R}$. Comme A est compact, on en extrait un sous-recouvrement fini : $A \subset \bigcup_{n \in J}]-n, n[$ avec $J \subset \mathbf{N}_{>0}$ fini. Prenons $n_0 = \max(J)$, alors $A \subset]-n_0, n_0[$, donc A est bornée.

• Soit A une partie fermée bornée. Comme A est bornée, il existe $m > 0$ tel que $A \subset \bigcup_{n \in J} [-m, m]$. On a que $[-m, m]$ est compact et A est fermé dans $[-m, m]$, donc A est compact par la proposition 3.3.2. $\square$

Proposition 3.3.4. Dans un espace topologique séparé, une union finie de compacts est compacte.

Démonstration. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Soient $K_1, \dots, K_n$ des compacts de X . Il est déjà clair que $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ est séparé car X l'est. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouvert de X tel que $\bigcup_{k=1}^n K_k \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Fixons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors $K_k \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ et comme K_k est compact, il existe $J_k \subset I$ fini tel que $K_k \subset \bigcup_{i \in J_k} U_i$.

On prend $J = \bigcup_{k=1}^n J_k$ (fini car réunion finie de parties finies), on a donc $\bigcup_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} K_k \subset \bigcup_{i \in J} U_i$, ce qui conclut. $\square$

Théorème 3.3.5 (TYCHONOFF). Un produit fini d'espaces topologiques compacts est compact.

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour le cas d'un produit de deux compacts. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ compacts. On a déjà vu que $X \times Y$ est séparé. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Pour tout $(x, y) \in X \times Y$, il existe $i_{(x,y)} \in I$ tel que $(x, y) \in O_{i_{(x,y)}}$. C'est un voisinage de (x, y) , donc il existe un ouvert élémentaire $U_{x,y} \times V_{x,y}$ avec $U_{x,y}$ ouvert de X et $V_{x,y}$ ouvert de Y , tel que $(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subset O_{i_{(x,y)}}$. On fixe $x \in X$. L'ensemble $(V_{x,y})_{y \in Y}$ est alors un recouvrement ouvert de Y , qui est compact : il existe donc $J_x \subset Y$ tel que $Y = \bigcup_{y \in J_x} V_{x,y}$ avec J_x fini. On pose $W_x = \bigcap_{y \in J_x} U_{x,y}$. C'est un voisinage ouvert de x car J_x est fini.

L'ensemble $(W_x)_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X , qui est compact : il existe donc $M \subset X$ fini tel que $X = \bigcup_{x \in M} W_x$. On a alors

$$\begin{aligned} X \times Y &= \bigcup_{x \in M} W_x \times Y = \bigcup_{x \in M} \bigcup_{y \in J_x} W_x \times V_{x,y} \\ &\subset \bigcup_{x \in M} \bigcup_{y \in J_x} U_{x,y} \times V_{x,y} \subset \bigcup_{x \in M} \bigcup_{y \in J_x} O_{i_{(x,y)}}. \end{aligned}$$

On a bien construit un sous-recouvrement fini de $(O_i)_{i \in I}$ puisque M et J_x sont finis. $\square$

Corollaire 3.3.6. Les pavés $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ sont compacts.

Démonstration. La norme $\|\cdot\|_\infty$ induit la topologie produit et chaque segment $[a_i, b_i]$ est compact dans $\mathbf{R}$. $\square$

Corollaire 3.3.7 (BOREL-LEBESGUE). Une partie de $\mathbf{R}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée bornée.

Démonstration. De la même manière que dans $\mathbf{R}$, on munit $\mathbf{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

• Soit A un compact de $\mathbf{R}^n$, alors A est fermé par la proposition 3.3.1. De plus, $A \subset \mathbf{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbf{N}_{>0}} B(0, k)$.

On extrait un sous-recouvrement fini : il existe $J \subset \mathbf{N}_{>0}$ fini tel que $A \subset \bigcup_{k \in J} B(x, k)$. Si on pose $k_0 = \max(J)$, alors $A \subset B(0, k_0)$.

• Soit A fermée bornée. Il existe $r \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $A \subset \bar{B}(0, r) = [-r, r]^n$ qui est compact par le corollaire 3.3.6. Enfin, A est fermé donc A est compact par la proposition 3.3.2. $\square$

Remarque 3.3.8. Attention ! Cette caractérisation est fautive dans les espaces métriques généraux. Elle est déjà fautive pour les espaces vectoriels normés de dimension infinie.

3.4 Fonctions continues et compacité

Théorème 3.4.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques avec Y séparé et K un compact de X . L'image d'un compact par une application continue de K dans Y est compacte.

Démonstration. Soit $f: X \rightarrow Y$ continue. Soit K un compact de X . L'image $f(K)$ est séparé puisque Y l'est. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(K)$. On a alors $K \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ et pour tout $i \in I$, $f^{-1}(U_i)$ est ouvert, d'où U_i est ouvert. Comme K est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini : il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)$, alors $f(K) \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ qui est bien un sous-recouvrement fini de $(U_i)_{i \in I}$ et donc $f(K)$ est compact. $\square$

Corollaire 3.4.2. Toute application continue sur un espace topologique compact non vide à valeurs dans $\mathbf{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $(X, \mathcal{T})$ compact non vide et $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ continue. D'après le théorème 3.4.1, $f(X)$ est un compact de $\mathbf{R}$, donc un fermé borné. En particulier, f est bornée. Par les propriétés de $\mathbf{R}$, on peut définir $a := \inf_{x \in X} \{f(x)\}$ et $b := \sup_{x \in X} \{f(x)\}$. Comme $f(X)$ est fermé, on a $a, b \in f(X)$, donc les bornes sont atteintes. $\square$

Remarque 3.4.3. Attention ! Il est faux de dire que l'image réciproque d'un compact par une application continue est compacte. Par exemple :

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

et $f^{-1}([0, 1]) = [0, 1] \times \mathbf{R}$ n'est pas compacte (car pas bornée). En revanche, c'est toujours un fermé.

Corollaire 3.4.4. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue bijective, avec X compact et Y séparé. L'application f est alors un homéomorphisme.

Démonstration. On doit vérifier que f^{-1} est continue. Soit F un fermé de X . Étudions $(f^{-1})^{-1}$: l'application f est bijective, donc $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$. L'ensemble X est compact et F est fermé dans X , donc F est compact par la proposition 3.3.2. D'après le théorème 3.4.1, comme Y est séparé, alors $f(F)$ est compact, d'où $f(F)$ est fermé par la proposition 3.3.1. $\square$

4 Espaces métriques complets

Jusqu'à présent, on pouvait parler de la convergence d'une suite seulement quand on connaissait à priori la limite. La complétude est une notion métrique qui permet de prédire l'existence d'une limite à partir de propriétés de la suite.

Dans tout ce chapitre, on se place dans le cadre d'un espace métrique (X, d) .

4.1 Suite de Cauchy, espaces complets, exemple fondamental

Définition 4.1.1. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'un espace métrique (X, d) est de *Cauchy* lorsqu'elle vérifie :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n, m \geq N) \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 4.1.2. Une suite de Cauchy est toujours bornée.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de (X, d) . On applique la définition avec $\varepsilon = 1$: $(\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \geq N) (\forall m \geq N) d(x_n, x_m) < 1$. On prend $M = \max(1, d(x_0, x_N), \dots, d(x_{N-1}, x_N))$. On a alors pour tout $n \in \mathbf{N}$: $d(x_n, x_N) \leq M$. $\square$

Proposition 4.1.3. Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est convergente.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de (X, d) . On suppose que l'on a une sous-suite $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers $\ell \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. On écrit que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy : $(\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \geq N) (\forall m \geq N) d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. On écrit aussi que $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge : $(\exists n_0 \in \mathbf{N}) (\forall n \geq n_0) d(x_{k(n)}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$. On choisit $n_1 \geq n_0$ tel que $k(n_1) \geq N$. On a alors pour $n \geq N$:

$$d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_{k(n)}) + d(x_{k(n)}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Proposition 4.1.4. Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de (X, d) qui converge vers $\ell \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $n \geq N$ et $m \geq N$, alors

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \ell) + d(\ell, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Un espace métrique complet est un espace où la réciproque de cette proposition est vraie.

Définition 4.1.5. On dit que l'espace métrique (X, d) est *complet* lorsque toute suite de Cauchy de X converge.

Notre exemple fondamental est donc :

Théorème 4.1.6. L'ensemble $\mathbf{R}$ est complet.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbf{R}$. Cette suite est donc bornée : il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|x_n| \leq M$. De plus, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de $[-M, M]$ qui est compact. Par Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}}$. La proposition 4.1.3 donne la convergence de toute la suite. $\square$

Remarque 4.1.7. On peut démontrer ce résultat sans argument de compacité, en revenant à la propriété de la borne supérieure. (Il suffit de montrer que $y_n = \sup_{p \geq n} x_p$ et $z_n = \inf_{p \geq n} x_p$ sont adjacentes, à faire en exercice).

Exemple 4.1.8. L'ensemble $\mathbf{Q}$ n'est pas complet : on peut approcher un irrationnel $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ par une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de rationnels. La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$, donc aussi dans $\mathbf{Q}$, mais $r \notin \mathbf{Q}$, la suite ne converge donc pas dans $\mathbf{Q}$.

Théorème 4.1.9. Si X est un ensemble et (Y, d') est un espace métrique complet, alors $\mathcal{F}_b(X, Y)$ muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est complet.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{F}_b(X, Y), d_\infty)$:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall m, n \geq N) \quad d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

On fixe $x \in X$. Pour $(m, n) \in \mathbf{N}^2$, on a

$$d'(f_n(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m).$$

La suite $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est donc de Cauchy dans Y qui est complet. Elle converge vers une limite $f(x) \in Y$. On a construit $f: X \rightarrow Y$. Vérifions que f est bornée. Par définition, si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, on a avec $\varepsilon = 1$:

$$(\exists N_1 \in \mathbf{N}) (\forall n, m \geq N_1) \quad d_\infty(f_n, f_m) < 1.$$

Soit $y_0 \in Y$. Pour $x \in X$ et $n \geq N_1$, on a

$$\begin{aligned} d'(f_n(x), y_0) &\leq d'(f_n(x), f_{N_1}(x)) + d'(f_{N_1}(x), y_0) \\ &\leq d_\infty(f_n, f_{N_1}) + d_\infty(f_{N_1}, y_0) \\ &< d_\infty(f_{N_1}, y_0) + 1. \end{aligned}$$

On fait tendre n vers $+\infty$:

$$d'(f(x), y_0) \leq d_\infty(f_{N_1}, y_0) + 1.$$

Ceci est vrai pour tout $x \in X$. On sait que f est bornée et on vérifie que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers f pour d_∞ . Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy : $(\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n, m \geq N) \quad d_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon$. Soit $x \in X$. Pour $n, m \geq N$:

$$d'(f_m(x), f_n(x)) \leq d_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon.$$

On fait tendre m vers $+\infty$: $d'(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout $x \in X$, donc $d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$. On a prouvé que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ pour d_∞ . $\square$

4.2 Propriétés des espaces complets

Proposition 4.2.1. Dans un espace métrique complet (X, d) , un sous-ensemble est complet (avec la métrique induite) si et seulement si il est fermé.

Démonstration. Soit F une partie de X .

- On suppose F fermé. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de (F, d_F) . La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est alors de Cauchy dans X qui est complet, donc elle converge vers un $\ell \in X$. Mais F est fermé, donc $\ell \in F$ d'après la proposition 1.4.9 du chapitre 1.
- On utilise à nouveau la proposition 1.4.9 du chapitre 1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de F qui converge dans X , vers un $\ell \in X$. On veut montrer que $\ell \in F$. On part de l'hypothèse F complet. La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans X , donc aussi dans F . L'ensemble F est complet, donc $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans F . Par unicité de la limite (car X est séparé), on en déduit $\ell \in F$ et on conclut que F est fermé. $\square$

Corollaire 4.2.2. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et (Y, d') un espace métrique complet, alors $\mathcal{C}_b^0(X, Y)$ muni de d_∞ est complet.

Démonstration. On a déjà vu que $\mathcal{C}_b^0(X, Y)$ est un fermé de $\mathcal{F}_b(X, Y)$. $\square$

Proposition 4.2.3. Soit (X, d) un espace métrique. Une union finie de sous-espaces complets de X est complète.

Démonstration. Soient $A_1, \dots, A_k$ des sous-espaces complets de X . Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $B = A_1 \cup \dots \cup A_k$, alors l'un des A_i contient une infinité de termes de la suite : en effet, notons pour $i \in \{1, \dots, k\}$, $I_i := \{n \in \mathbf{N}; x_n \in A_i\}$. On a alors que $I_1 \cup \dots \cup I_k = \mathbf{N}$ qui est infinie, donc il existe i_0 tel que I_{i_0} soit infini. On peut donc extraire une sous-suite $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ qui reste dans A_{i_0} . Ainsi, $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans A_{i_0} qui est complet, donc converge vers un $\ell \in A_{i_0}$. D'après la proposition 4.1.3, la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ elle-même converge (vers $\ell \in B$). $\square$

Proposition 4.2.4. Tout espace métrique compact est complet.

Démonstration. On suppose (X, d) un espace métrique compact. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy. On utilise la compacité séquentielle. On peut extraire une sous-suite $(x_{k(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ convergente. Avec la proposition 4.1.3, la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge aussi. $\square$

Proposition 4.2.5. Un produit fini d'espaces métriques complets est complet.

Démonstration. Soit $(X_1, \delta_1), \dots, (X_k, \delta_k)$ des espaces métriques complets. On munit $X = X_1 \times \dots \times X_k$ de la distance d_∞ : si $x = (x_1, \dots, x_k)$ et $y = (y_1, \dots, y_k)$ sont dans X , on pose

$$d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \delta_i(x_i, y_i).$$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de X . On note $x_n = (x_{n_1}, \dots, x_{n_k})$. On a par définition : $(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n, m \geq N) d_\infty(x_n, x_m) < \varepsilon$. Fixons $i \in \{1, \dots, k\}$, alors $\delta_i(x_{n_i}, x_{m_i}) \leq d_\infty(x_n, x_m)$. La suite $(x_{n_i})_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans X_i , qui est complet, donc elle converge vers un $y_i \in X_i$. Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $y = (y_1, \dots, y_k) \in X$ (déjà vu dans la partie « topologie produit »). $\square$

Exemple 4.2.6. Ainsi $\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n, M_n(\mathbf{R}), M_n(\mathbf{C})$ et leurs parties fermées sont des espaces métriques complets.

4.3 Applications de la complétude

Définition 4.3.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une application $f: X \rightarrow X$ est *contractante* lorsqu'il existe un réel $\alpha \in [0, 1[$ tel que pour tout $(x, y) \in X^2$,

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y).$$

Remarque 4.3.2. Si f est contractante, alors elle est continue. En effet, si $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, alors pour tout $y \in B(x, \varepsilon)$, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \leq \alpha \varepsilon < \varepsilon.$$

Théorème 4.3.3 (DU POINT FIXE - PICARD). Soit (X, d) un espace métrique complet non vide et soit $f: X \rightarrow X$ contractante. L'application f admet alors un unique point fixe $x \in X$ (i.e. $f(x) = x$). De plus, toute suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ donnée par $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, converge vers x .

Démonstration. **Unicité :** Supposons que x et y soient points fixes de f . Par hypothèse, il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que pour tout $(u, v) \in X^2$, $d(f(u), f(v)) \leq \alpha \cdot d(u, v)$. En particulier, $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$. On obtient alors $(1 - \alpha)d(x, y) \leq 0$ d'où $d(x, y) = 0$ et $x = y$.

Existence : Soit $x_0 \in X$ et $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite récurrente définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$. On va montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy. Soient $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ avec $m \geq n$. On a $d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k)$ avec donc

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq \alpha \cdot d(x_k, x_{k-1}).$$

En itérant, on obtient $d(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha^k d(x_1, x_0)$. C'est vrai pour tout $k \geq 0$. On en déduit

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k d(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0).$$

Finalement, $d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$. La suite $(\frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0))_{n \geq 0}$ est décroissante et converge vers 0 dans $\mathbf{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit un $N \geq 0$ tel que $\frac{\alpha^N}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon$. D'après le calcul précédent, si $m, n \geq N$, alors

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon.$$

L'espace (X, d) est complet et on vient de vérifier que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, donc cette suite converge vers un $x \in X$. On a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. On fait tendre n vers $+\infty$. Comme f est continue en x , on trouve $x = f(x)$. $\square$

Définition 4.3.4. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est de *Baire* lorsque pour toute suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'ouverts denses dans X , l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n$ est dense.

Remarque 4.3.5. (1) Attention ! L'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n$ n'est pas ouvert en général.

(2) Par passage au complémentaire, on a « X est un espace de Baire si et seulement si toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide ».

Exemple 4.3.6. L'ensemble $\mathbf{Q}$ muni de la distance usuelle n'est pas de Baire. En effet, $\mathbf{Q}$ est dénombrable. Soit $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tel que $\mathbf{Q} = \{r_n; n \in \mathbf{N}\}$. On prend $U_n = \mathbf{Q} \setminus \{r_n\}$ qui est ouvert dense dans $\mathbf{Q}$. Mais $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n = \emptyset$, qui n'est pas dense.

Théorème 4.3.7. Les espaces métriques complets sont de Baire.

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses de X . Montrons que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n$ est dense. Soit V un ouvert non vide de X . On doit montrer que $V \cap \bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n \neq \emptyset$. Tout d'abord, U_0 est dense, donc $U_0 \cap V \neq \emptyset$. On choisit un $x_0 \in U_0 \cap V$. Les parties U_0 et V sont ouvertes, donc $U_0 \cap V$ aussi : il existe $r_0 > 0$ tel que $\mathcal{B}(x_0, r_0) \subset U_0 \cap V$. Quitte à réduire r_0 , on peut demander que la boule fermée $\bar{\mathcal{B}}(x_0, r_0)$ soit contenue dans $U_0 \cap V$ et que $r_0 \leq 1$. Par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans X et une suite $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}_{>0}$ telles que $r_n \leq \frac{1}{2^n}$ et que pour tout $n \geq 1$, la boule fermée $\bar{\mathcal{B}}(x_n, r_n)$ soit contenue dans $\mathcal{B}(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n$. Les points x_0 et r_0 sont déjà construits. Supposons x_{n-1} et r_{n-1} construits pour $n \geq 1$. L'ouvert U_n est dense, donc $U_n \cap \mathcal{B}(x_{n-1}, r_{n-1}) \neq \emptyset$, on choisit $x_n \in U_n \cap \mathcal{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$ mais comme U_n est ouvert, alors $U_n \cap \mathcal{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$ aussi : il existe $r_n > 0$ tel que $\bar{\mathcal{B}}(x_n, r_n) \subset U_n \cap \mathcal{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$ et on peut supposer $r_n \leq \frac{1}{2^n}$. On a $\bar{\mathcal{B}}(x_n, r_n) \subset \bar{\mathcal{B}}(x_{n-1}, r_{n-1})$: les $(\bar{\mathcal{B}}(x_n, r_n))_{n \in \mathbf{N}}$ forment une suite décroissante. Si $m \geq n$, alors $x_m \in \bar{\mathcal{B}}(x_n, r_n)$ i.e. $d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2^n}$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N \geq 0$ tel que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Pour $m, n \geq N$, on a alors

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans X qui est complet, elle converge vers un $\tilde{x} \in X$. On réutilise que pour tout $m \geq n$, $x_m \in \bar{\mathcal{B}}(x_n, r_n)$. À n fixé, on fait tendre m vers $+\infty$. On a alors $\tilde{x} \in \bar{\mathcal{B}}(x_n, r_n)$ car $\bar{\mathcal{B}}(x_n, r_n)$ est fermé. Par construction, $\bar{\mathcal{B}}(x_n, r_n) \subset U_n$, donc $\tilde{x} \in U_n$ et $\bar{\mathcal{B}}(x_0, r_0) \subset V$, d'où $\tilde{x} \in V$. Finalement, $\tilde{x} \in V \cap \bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n$ qui est donc non vide. $\square$

Lemme 4.3.8. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace de Baire. Soit $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fermés telle que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n = X$. L'ouvert $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \text{Int}(F_n)$ est alors dense dans X .

Démonstration. L'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \text{Int}(F_n)$ est un bien un ouvert comme union d'ouverts. Pour $n \in \mathbf{N}$, $F_n \setminus \text{Int}(F_n)$ est un fermé, qui est d'intérieur vide : si U est son intérieur, alors $U \subset F_n \setminus \text{Int}(F_n)$, donc $U \subset F_n$ et $U \cap \text{Int}(F_n) = \emptyset$. Mais comme $U \subset \text{Int}(F_n)$ car U est ouvert, on a forcément $U = \emptyset$. La définition de Baire donne que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (F_n \setminus \text{Int}(F_n))$ est d'intérieur vide. On veut montrer que $X \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \text{Int}(F_n)$ est d'intérieur vide. Il suffit de vérifier que

$$X \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \text{Int}(F_n) \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (F_n \setminus \text{Int}(F_n)).$$

Soit $x \in X \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \text{Int}(F_n)$. On sait que $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$, donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $x \in F_{n_0}$, alors $x \notin \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \text{Int}(F_n)$, donc en particulier $x \notin \text{Int}(F_{n_0})$. Ainsi,

$$x \in F_{n_0} \setminus \text{Int}(F_{n_0}) \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (F_n \setminus \text{Int}(F_n)).$$

$\square$

Voici une application du théorème de Baire.

Proposition 4.3.9. Soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une suite d'applications continues avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. On suppose que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f sur $[a, b]$. L'ensemble des points où f est continue est alors dense dans $[a, b]$.

Remarque 4.3.10. Attention ! En général, f n'est pas continue sur $[a, b]$.

Démonstration. Le segment $[a, b]$ est compact donc complet. Il est donc également de Baire. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$F_{\varepsilon, n} = \{x \in [a, b]; (\forall m \geq n) |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}.$$

On remarque que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (f_n - f_m)^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ qui est fermé car $f_n - f_m$ est continue et on a

$$F_{\varepsilon, n} = \bigcap_{m \geq n} (f_n - f_m)^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$$

qui est donc fermé. Vérifions que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_{\varepsilon, n} = [a, b]$. Soit $x \in [a, b]$. La suite $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$: il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n, m \geq N$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. En particulier, $x \in F_{\varepsilon, N} \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_{\varepsilon, n}$. On peut appliquer le lemme 4.3.8 : $G_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \text{Int}(F_{\varepsilon, n})$ est un ouvert dense de $[a, b]$. On peut ré-appliquer le théorème de

Baire : $G = \bigcap_{k \geq 1} G_{1/k}$ est dense dans $[a, b]$. Il reste à vérifier que si $x \in G$, alors f est continue en x . Soit $\varepsilon > 0$.

On choisit $k \geq 1$ tel que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$. On a alors $x \in G_{1/k} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \text{Int}(F_{1/k,n})$. Il existe $N \geq 0$ tel que $x \in \text{Int}(F_{1/k,N})$. On

remarque que si $y \in F_{1/k,N}$, alors pour tout $m \geq N$, $|f_N(y) - f_m(y)| \leq \frac{1}{k}$ donc en faisant tendre m vers $+\infty$, on trouve $|f_N(y) - f(y)| \leq \frac{1}{k}$. L'application f_N est continue en x , donc il existe un voisinage W de x tel que pour tout $y \in W$, $|f_N(y) - f_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. L'intersection $\text{Int}(F_{1/k,N}) \cap W$ est un voisinage de x . Soit $y \in \text{Int}(F_{1/k,N}) \cap W$. On a alors

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\ &< \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□